Persamaan dan Fungsi Kuadrat

Bentuk persamaan kuadrat: $\boxed{ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0}$

A. Rumus Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar

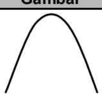
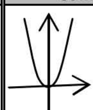
$x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$	$x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{D}}{a}$	$x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a}$
$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 . x_2$		$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$	
$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 . x_2(x_1 + x_2)$		$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 . x_2}$	

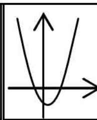
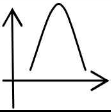
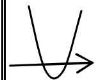
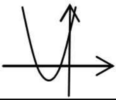
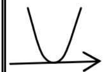
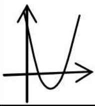
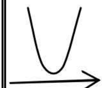
Jenis Akar	Syarat	Contoh
Akar real berlainan tanda	$D > 0$ dimana $D = b^2 - 4ac$	$x^2 + x - 2$ $D = 1^2 - 4.1.(-2) = 9$ $(D > 0)$ Akarnya: $x_1 = -2$ dan $x_2 = 1$
Akar real kembar	$D = 0$	$x^2 + 4x + 2$ $D = 4^2 - 4.1.2 = 0$ Akarnya pasti hanya $x = -2$
Akar imajiner/ khayal	$D < 0$	$x^2 + x + 2$ $D = 1^2 - 4.1.2 = -7$ $(D < 0)$ Akarnya tidak riil

B.Menebak Akar Persamaan Kuadrat

Hasil akar	Persyaratan
Kedua akarnya positif	$x_1 + x_2 > 0$; $x_1 \cdot x_2 > 0$; $D \geq 0$
Kedua akarnya negatif	$x_1 + x_2 < 0$; $x_2 \cdot x_2 > 0$; $D \geq 0$
Kedua akarnya berlainan tanda	$x_1 \cdot x_2 < 0$; $D > 0$
Kedua akarnya berlawanan	$x_1 + x_2 = 0$; $b = 0$
Kedua akarnya berkebalikan	$x_1 . x_2 = 1$; $c = a$

C. Pengaruh a, b, c dan D Terhadap Gambar Fungsi

Gambar	Syarat	Gambar	Syarat
	$a < 0$		$c = 0$

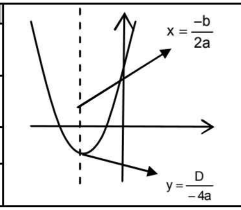
	$a > 0$		$c < 0$ **Keterangan:** Memotong sumbu y di y negatif
	$a \,.\, b < 0$		$D > 0$ dimana $D = b^2 - 4ac$
	$a \,.\, b > 0$		$D = 0$
	$c > 0$ **Keterangan:** Memotong sumbu y di y positif		$D < 0$

D. Membuat Persamaan Kuadrat Baru

Akar Persamaan Kuadrat Baru	Persamaan Kuadrat Baru
α dan β	$x^2 - (\alpha + \beta)\ x + \alpha.\beta = 0$
$\frac{1}{x_1}$ dan $\frac{1}{x_2}$	$c.x^2 + bx + a = 0$
nx_1 dan nx_2	$ax^2 + nbx + n^2c = 0$
$x_1 = nx_2$	$nb^2 = ac.(n+1)^2$
$x_1 + n$ dan $x_2 + n$	$a(x-n)^2 + b.(x-n) + c = 0$
x_1^2 dan x_2^2	$a^2 x^2 - (b^2 - 2ac)\,x + c^2 = 0$

D. Nilai Maksimum dan Minimum

Nilai	Rumus dan Syarat
Sumbu Simetri	$x = \frac{-b}{2a}$
Nilai Extrem	$y = \frac{D}{-4a}$
Nilai Maximum	jika $a < 0$
Nilai Minimum	jika $a > 0$



E.Menyusun Persamaan Fungsi Kuadrat

Kondisi	Rumus
Bila diketahui titik puncak (x_p, y_p) dan titik lain	$y = a(x - x_p)^2 + y_p$
Bila diketahui titik potong sumbu *x* (x_1, 0) dan (x_2, 0)	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$
Diketahui tiga titik pada parabola: $y = ax^2 + bx + c$	Eliminasi dan substitusi

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Jumlah nilai-nilai m yang mengakibatkan persamaan kuadrat $mx^2 - (3m + 1)x + (2m + 2) = 0$ mempunyai akar-akar dengan perbandingan 3 : 4 adalah

A. 7/6 B. 13/5 C.11/3 D.3/2 E.5/6

Jawab:

$mx^2 - (3m + 1)x + (2m + 2) = 0$, akarnya x_1 dan x_2 dengan $x_2 = \frac{3}{4} x_1$.

*) $x_1 + x_2 = \frac{3m+1}{m}$ *) $x_1 \cdot x_2 = \frac{2m+2}{m} = \frac{2(m+1)}{m}$

$x_1 \cdot \frac{3}{4} x_1 = \frac{2(m+1)}{m} \Rightarrow x_1^2 = \frac{8(m+1)}{3m}$ $x_1 + \frac{3}{4} x_1 = \frac{3m+1}{m} \Rightarrow x_1 = \frac{4(3m+1)}{7m}$

Diperoleh :

$$\left(\frac{4(3m+1)}{7m}\right)^2 = \frac{8(m+1)}{3m} \Leftrightarrow \frac{16(3m+1)^2}{49m^2} = \frac{8(m+1)}{3m} \Leftrightarrow \frac{2(9m^2+6m+1)}{49m} = \frac{(m+1)}{3} \Leftrightarrow$$

$$54m^2 + 36m + 6 = 49m^2 + 49m \Leftrightarrow 5m^2 - 13m + 6 = 0 \rightarrow m_1 + m_2 = \frac{13}{5}$$

Pertidaksamaan

A. Sifat Pertidaksamaan

Sifat 1:

$a < b,\ c \in R \rightarrow a + c < b + c$

Contoh:

$1 < 2,\ c = 3 \rightarrow 1 + 3 < 2 + 3 \rightarrow 4 < 5$

Sifat 2:

$a < b,\ c > 0 \rightarrow ac < bc$

$a < b,\ c < 0 \rightarrow ac > bc$

Contoh:

$1 < 2,\ c = 3 \rightarrow 1.3 < 2.3 \rightarrow 3 < 6$

$1 < 2,\ c = -3 \rightarrow 1.(-3) < 2.(-3) \rightarrow -3 > -6$

Sifat 3:

$0 < a < b \rightarrow a^n < b^n$

$a < b \rightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$

n bilangan bulat positif

Contoh:

Jika a = 1 , b = 2 dan n = 3

$\rightarrow 0 < 1 < 2 \rightarrow 1^3 < 2^3 \rightarrow 1 < 8$

Jika a = 1 , b = 2 dan n = 3

$\rightarrow 1 < 2 \rightarrow 1^{2.3+1} < 2^{2.3+1} \rightarrow 1 < 128$

Sifat 4:

$a < b$ dan $b < c \rightarrow a < c$

Contoh:

$1 < 2$ dan $2 < 3 \rightarrow 1 < 3$

Sifat 5:

$a < b$ dan $c < d \rightarrow a + c < b + d$

$1 < 2$ dan $3 < 4 \rightarrow 1 + 3 < 2 + 4 \rightarrow 4 < 6$

Sifat 6:

$a < b$ dan $ab > 0 \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$1 < 2$ dan $1.2 > 0 \rightarrow \frac{1}{1} > \frac{1}{2}$

Sifat 7:

$\frac{a}{b} < 0 \rightarrow ab < 0,\ b \neq 0$

Jika a = -1 , b = 2

$\rightarrow \frac{-1}{2} < 0 \rightarrow -1.2 < 0 \rightarrow -2 < 0$

Sifat 8:

$\frac{a}{b} > 0 \rightarrow ab > 0,\ b \neq 0$

Jika a = 1 , b = 2 $\rightarrow \frac{1}{2} > 0 \rightarrow 1.2 < 0$

C. Penyelesaian Pertidaksamaan

Penyelesaian Pertidaksamaan Bentuk Kuadrat

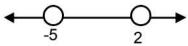
Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x^2 + 3x < 10$

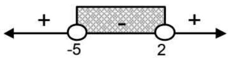
Nolkan ruas kanan: $x^2 + 3x < 10 \rightarrow x^2 + 3x - 10 < 0$

Cari pembuat nol: $x^2 + 3x - 10 < 0 \rightarrow (x+5)(x-2) < 0 \rightarrow x = -5$ atau $x = 2$

Buat garis bilangan:



Beri tanda pada garis bilangan dan menentukan daerah penyelesaian:
Tanda koefisien pangkat tertinggi adalah x^2 (positif), maka tanda paling kanan adalah positif. Karena diminta kurang dari nol (< 0), maka pilih daerah yang negatif



Himpunan penyelesaian adalah -5 < *x* < 2

Penyelesaian Pertidaksamaan Bentuk Pecahan

Contoh:

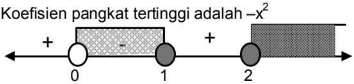
Tentukan himpunan penyelesaian $\frac{3x-2}{x} \leq x$

Pecahan bentuk seperti ini dilarang dikali silang karena penyebut belum jelas positif atau negatif.

$$\frac{3x-2}{x} \leq x \rightarrow \frac{3x-2}{x} - x \leq 0 \rightarrow \frac{3x-2}{x} - \frac{x^2}{x} \leq 0 \rightarrow \frac{-x^2+3x-2}{x} \leq 0$$

$$\rightarrow \frac{(-x+1)(x-2)}{x} \leq 0 \text{ dan } x \neq 0$$

Koefisien pangkat tertinggi adalah $-x^2$



Himpunan penyelesaian adalah $0 < x \leq 1$ atau $x \geq 2$

Perhatian!

- Tanda < diberikan warna putih pada bulatan
- Tanda ≤ diberikan warna gelap pada bulatan

3. Penyelesaian Pertidaksamaan Bentuk Akar

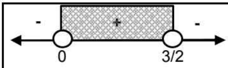
Langkah-langkah:

- Kuadratkan kedua ruas
- Syarat akar tidak boleh bernilai negatif

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\sqrt{\frac{2}{x} + 1} > \sqrt{3 - \frac{1}{x}}$

Kuadratkan kedua ruas: $\sqrt{\frac{2}{x} + 1} > \sqrt{3 - \frac{1}{x}} \rightarrow \frac{2}{x} + 1 > 3 - \frac{1}{x} \rightarrow \frac{3-2x}{x} > 0$

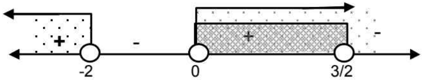


Daerah paling kanan negatif karena pangkat tertinggi -2x

Nilai *x* yang memenuhi penyelesaian pertama adalah $0 < x < \frac{3}{2}$

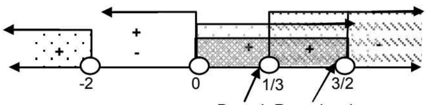
Syarat berikutnya adalah akar tidak boleh bernilai negatif

Ruas kiri $\frac{2}{x} + 1 > 0 \rightarrow \frac{2+x}{x} > 0$



Nilai *x* yang memenuhi penyelesaian kedua adalah $x < -2$ atau $x > 0$

Ruas kanan $3 - \frac{1}{x} > 0 \rightarrow \frac{3x-1}{x} > 0$



Nilai *x* yang memenuhi penyelesaian kedua adalah $x < 0$ atau $x > \frac{1}{3}$

Pilih daerah yang paling banyak ditiban arsiran. Maka himpunan penyelesaiannya adalah

$\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$

4. Penyelesaian Pertidaksamaan Bentuk Nilai Mutlak
Sifat-sifat pertidaksamaan nilai mutlak:

$|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a \qquad |x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a$ atau $x \ge a$

$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$\dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} \le k \Leftrightarrow (f(x) - k \cdot g(x))(f(x) + k \cdot g(x)) \le 0$

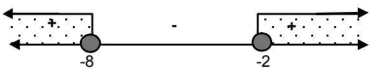
Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian $\left|\dfrac{2x+7}{x-1}\right| \ge 1$

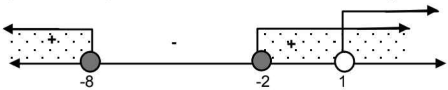
$\left|\dfrac{2x+7}{x-1}\right| \ge 1 \rightarrow |2x+7| \ge |x-1| \rightarrow$ kedua ruas dikuadratkan

$(2x+7)^2 \ge (x-1)^2 \rightarrow 4x^2 + 28x + 49 \ge x^2 - 2x + 1 \rightarrow 4x^2 + 28x + 49 - x^2 + 2x - 1 \ge 0$

$\rightarrow 3x^2 + 30x + 48 \ge 0 \rightarrow (x+8)(3x+6) \ge 0 \rightarrow x = -8$ atau $x = -2$



Syarat berikutnya adalah $x \ne 1$ maka harus ditambah gambar



Maka himpunan penyelesaiannya adalah:

$x \le 8$ atau $-2 \le x < 1$ atau $x > 1$

🕮 CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Untuk $0 \le x \le 12$, nilai x yang memenuhi pertaksamaan $\cos \dfrac{\pi x}{6} \ge \dfrac{1}{2}$ adalah

A. $0 \le x \le 3$ atau $6 \le x \le 9$

B. $0 \le x \le 3$ atau $6 \le x \le 12$

C. $2 \le x \le 4$ atau $8 \le x \le 10$

D. $1 \le x \le 3$ atau $9 \le x \le 11$

E. $0 \le x \le 2$ atau $10 \le x \le 12$

✍ **<u>Jawab:</u>**

$0 \le x \le 12$, $\cos \dfrac{\pi x}{6} \ge \dfrac{1}{2}$, diperoleh : $0 \le \dfrac{\pi x}{6} \le \dfrac{\pi}{3}$ atau $\dfrac{5\pi}{3} \le \dfrac{\pi x}{6} \le 2\pi$

$\rightarrow 0 \le x \le 2$ atau $10 \le x \le 12$

Persamaan Garis dan Gradien

A. Persamaan Garis

Deskripsi Garis	Rumus Membuat Garis
Melalui titik (x_1, y_1) dengan gradient *m*	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
Memotong sumbu x di (b,0) dan sumbu y di (0, a)	$ax + by = a.b$
Garis sejajar dengan garis $ax+by = c$ dan melalui (p,q)	$ax+by = ap+bq$

B. Rumus Gradien (*m*)

Deskripsi Garis	Rumus Gradien
Jika diketahui $y = mx + c$,	Gradien $= m$
Jika diketahui dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Jika diketahui $Ax + By + C = 0$	$m = -\frac{A}{B}$
Jika diketahui sudut θ	$m = \tan\theta$

C. Hubungan Dua Garis

Diketahui garis $g : y = m_1 x + c_1$ dan garis $h : y = m_2 x + c_2$ maka:

Kondisi	Syarat
Garis g akan sejajar dengan h	$m_1 = m_2$
Garis g akan tegak lurus dengan h	$m_1 . m_2 = -1$
Jika Garis g dan h berpotongan membentuk sudut α	$\tan\alpha = \left\lvert \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right\rvert$

D. Jarak Titik dan Jarak Dua Garis

Kondisi	Rumus
Jarak titik (x_1, y_1) ke $Ax + By + C = 0$	$d = \left\| \dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right\|$
Jarak dua garis sejajar: $g_1 = Ax + By + C_1 = 0$ $g_2 = Ax + By + C_2 = 0$	$d = \left\| \dfrac{C_1 - C_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right\|$

🕮 CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Soal 1

Diketahui kurva $y = ax + bx^2$, a dan b konstan. Jika garis singgung kurva ini pada titik (1,0) sejajar dengan garis $2x - y + 3 = 0$, maka a + 3b sama dengan

A. –2 B. 2 C. 4 D. 6 E. 8

✍ **Jawab:**

$y = ax + bx^2$, a dan b konstan → $y' = a + 2bx$ → $m = y^1(1, 0) = a + 2b$

Garis singgung sejajar $2x - y + 3 = 0$ maka m = 2, sehingga diperoleh : a + 2b = 2

Titik (1, 0) pada kurva $y = ax + bx^2$, sehingga diperoleh a + b = 0

a + 2b = 2

a + b = 0

-------------- –

$b = 2 \rightarrow a = -2$ Jadi a + 3b = –2 + 6 = 4

Soal 2

Garis g melalui titik (2,4) dan menyinggung parabola $y^2 = 8x$. Jika garis h melalui (0,0) dan tegak lurus pads garis g, maka persamaan garis h adalah ......

A. y = x B. y = 2x C. y = -x D. y = x +1 E. y = -2x

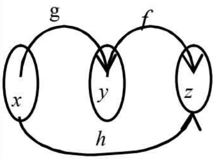
✍ **Jawab:**

$g = y^2 = 8x \rightarrow 2y\,dy = 8\,dx \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = m_g = \dfrac{8}{2y} = \dfrac{4}{y} = \dfrac{4}{4} = 1$

h tegak lurus dengan g → $m_g.m_h = -1$ → 1.mh = -1 → mh = -1

h melalui (0, 0) → y = mh .x → y = -x

Fungsi

Gambar	Contoh
	Jika diketahui $f(x) = x - 2$ dan $g(x) = 3x + 1$. Maka: $(f \circ g)(x) = (f(g(x)) = (3x+1) - 2 = 3x - 1$ $(g \circ f)(x) = (g(f(x)) = 3(x-2) + 2 = 3x - 5$

A. Fungsi Invers

Bentuk Fungsi	Invers	Contoh
$f(x) = ax + b$	$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$	$f(x) = 2x + 1, \rightarrow f^{-1} = \frac{x-1}{2}$
$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$	$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$	$f(x) = \frac{2x+1}{4x+5} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-5x+1}{4x-2}$
$f(x) = {}^{a}\log(bx+c)$	$f^{-1}(x) = \frac{a^x - c}{b}$	$f(x) = {}^{2}\log(2x+1) \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2^x - 1}{2}$
$f(x) = a^{bx+c}$	$f^{-1}(x) = \frac{{}^{a}\log x - c}{b}$	$f(x) = 2^{2x+3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{{}^{2}\log x - 3}{2}$

🕮 CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Diketahui dua fungsi $f(x) = 10^x$ dan $g(x) = x^2 + 5$ $f^{-1}(g(x^2)) = \ldots$

A. $\log x^2$ B. $\log(x^4 + 5)$ C. $\log x^4 - 5$ D. $\log x^4 + 5$ E. $\log(x^2 + 5)^2$

✍ **Jawab:**

$f(x) = 10^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log x$

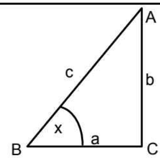
$g(x) = x^2 + 5 \Rightarrow g(x^2) = x^4 + 5$

$f^{-1}(g(x^2)) = f^{-1}(x^4 + 5) = \log(x^4 + 5)$

Trigonometri

A.Sudut-sudut Istimewa

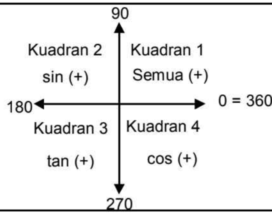
$\sin x = \frac{b}{c}$	$\csc x = \frac{c}{b}$
$\cos x = \frac{a}{c}$	$\sec x = \frac{c}{a}$
$\tan x = \frac{b}{a}$	$\cot x = \frac{a}{b}$



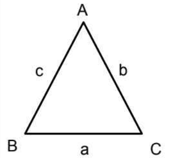
	0°	30°	37°	45°	53°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\approx \frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\approx \frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\approx \frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\approx \frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\approx \frac{3}{4}$	1	$\approx \frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$	∞

B. Bentuk-bentuk Trigonometri Sudut Terelasi

	Kuadran 1		Kuadran 2	
	α	**90 - α**	**90 + α**	**180 - α**
Sin	sin α	cos α	cos α	sin α
Cos	cos α	sin α	-sin α	-cos α
Tan	tan α	cot α	-cot α	-tan α
	Kuadran 3		**Kuadran 4**	
	180 + α	**270 - α**	**270 + α**	**360 - α**
Sin	-sin α	-cos α	-cos α	-sin α
Cos	-cos α	-sin α	sin α	cos α
Tan	tan α	cot α	-cot α	-tan α



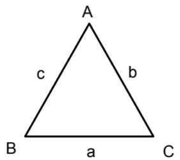
C.Aturan Sinus untuk Segitiga Sembarang



Pada setiap segitiga sembarang *ABC* berlaku aturan sinus, yaitu:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}}$$

D.Aturan Cosinus untuk Segitiga Sembarang

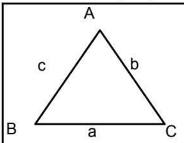


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

E. Luas Segitiga dengan Besar Sudut dan Dua Sisinya Diketahui



$$\boxed{L=\frac{1}{2}\times ab\sin C} \quad \boxed{L=\frac{1}{2}\times ac\sin B} \quad \boxed{L=\frac{1}{2}\times bc\sin A}$$

F. Rumus Identitas Trigonometri

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$
$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$	$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x+\cos x)^3 - 3\sin x\cos x.(\sin x+\cos x)$	

G. Rumus Jumlah dan Selisih Sudut

$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$	$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$	$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
$\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$	$\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$

H. Rumus Sudut 2*x*

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$	

I. Rumus Perkalian

$2\sin x.\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$	$2\cos x.\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$
$2\cos x.\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$	$-2\sin x.\sin y = \cos(x+y) - \cos(x-y)$

J. Rumus Jumlah dan Selisih Fungsi

$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$
$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B).\sin\frac{1}{2}(A-B)$
$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$
$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$

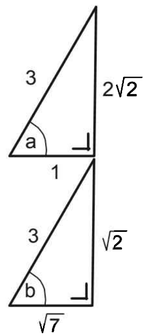
🕮 CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Jika $\cos a = \frac{1}{3}$ untuk $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$, dan $\sin b = \frac{\sqrt{2}}{3}$ untuk $\frac{\pi}{2} < b < \pi$, maka $\frac{\sin(a+b)}{\text{tg } a + \text{tg } b}$ sama dengan

A. $-\frac{1}{9}\sqrt{7}$ B. $\frac{1}{9}\sqrt{7}$ C. $-\frac{1}{4}\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ E. $\frac{1}{6}\sqrt{2}$

✍ **Jawab:**

$\cos a = \frac{1}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi \rightarrow$ a di kuadran IV.



$\sin a = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \tan a = -2\sqrt{2}$

$\sin b = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\pi}{2} < b < \pi$, b di kuadran II

$\cos b = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

$\tan b = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{14}+\sqrt{2}}{9}$$

$$\tan a + \tan b = -2\sqrt{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right) = \frac{-(2\sqrt{14}+\sqrt{2})}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{\sin(a+b)}{\tan a + \tan b} = \frac{2\sqrt{14}+\sqrt{2}}{9} \quad \frac{\sqrt{7}}{-(2\sqrt{14}+\sqrt{29})} = -\frac{1}{9}\sqrt{7}$$

Persamaan dan Fungsi Trigonometri

A. Persamaan Dasar

$\sin x = \sin p \rightarrow x = p + n.360^\circ$ atau $x = (180 - p) + n.360^\circ$
$\cos x = \cos p \rightarrow x = \pm p + n.360^\circ$
$\tan x = \tan p \rightarrow x = p + n.180^\circ$

B. Persamaan Khusus

Mengubah persamaan khusus berbentuk: $a\cos x + b\sin x = c$

Syarat dapat diselesaikan: $a^2 + b^2 \geq c^2$

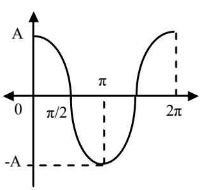
Diselesaikan dengan mengubah: $a\cos x + b\sin x = k\cos(x - \alpha)$

dengan $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$; α dan titik (*a*, *b*) di satu kuadran.

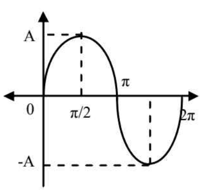
C. Fungsi Trigonometri

Bentuk umum:		
$y = A\sin k(x \pm \alpha) + c$	$y = A\cos k(x \pm \alpha) + c$	$y = A\tan k(x \pm \alpha) + c$
Untuk sinus dan cosinus: Periode: $P = \dfrac{360^\circ}{\lvert k\rvert} = \dfrac{2\pi}{\lvert k\rvert}$	nilai maks: $y = \lvert A\rvert + c$	nilai min: $y = -\lvert A\rvert + c$
Untuk tangen: Periode: $P = \dfrac{180^\circ}{\lvert k\rvert} = \dfrac{\pi}{\lvert k\rvert}$		

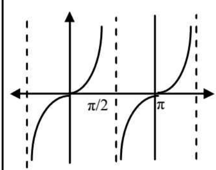
D. Grafik Fungsi Trigonometri



y = A cos *x*



y = A sin *x*



y = A tan *x*

E. Menentukan Nilai Maksimum dan Minimum

Bentuk 1: $y = f(x) = a\cos x + b\sin x + c$

maks: $y = k + c$ untuk $\cos(x - \alpha) = 1$ min: $y = -k + c$ untuk $\cos(x - \alpha) = -1$

Bentuk 2: $y = f(x) = a\ \sin^2 x + b\ \sin x + c$ dan $y = f(x) = a\cos^2 x + b\ \cos x + c$

nilai maks: *a* < 0 maksimum mutlak

nilai min: *a* > 0 minimum mutlak

$y_{max/\,min} = \dfrac{D}{-4a}$ untuk $\sin x = \dfrac{-b}{2a}$ dan $\cos x = \dfrac{-b}{2a}$ dengan syarat: $\left|\dfrac{-b}{2a}\right| \le 1$

Bentuk 3: $y = f(x) = a\tan^2 x + b\tan x + c$

$y_{max/\,min} = \dfrac{D}{-4a}$ untuk $\tan x = \dfrac{-b}{2a}$ Garis $x = 180° + k.180° =$ asimptot tegak

Bentuk 4: $y = \dfrac{a}{c + k\cos(x - \alpha)}$

untuk $|c| < |k|$ → $y_{max} = \dfrac{a}{c - k}$ dan $y_{min} = \dfrac{a}{c + k}$

untuk $|c| > |k|$ → y_{max} = tidak ada dan y_{min} = tidak ada

untuk $|c| = |k|$ → y_{max} = tidak ada dan y_{min} = ada

Limit Fungsi

A. Limit Aljabar

Bentuk	Rumus	Contoh
$\frac{0}{0}$	Diturunkan	$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \ldots$ x^2 -1 turunannya = 2x; $\sqrt{x}-1$ turunannya = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to1} \frac{2.1}{\frac{1}{2\sqrt{1}}} = 4$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m} = L$ Untuk n = m → $L = \frac{a}{p}$: n > m → $L = \infty$; n < m → $L = 0$ **Contoh:** $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 5}{x^3 + 5x - 6} = \frac{3}{1} = 3$	
$\infty - \infty$	$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{ax^2+px+q}\right) = \frac{b-p}{2\sqrt{a}}$ **Contoh:** $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4x-3} - \sqrt{x^2-3x+2} = \frac{4-(-3)}{2\sqrt{1}} = 3{,}5$	
$\infty - \infty$	$\lim_{x\to\infty} \sqrt{a^2x^2+px+q} - (ax+b) = \frac{b-2ab}{2a}$	

B. Limit Trigonometri

$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x\to0} \frac{x}{\sin x} = 1$	$\lim_{x\to0} \frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n}$
$\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x\to0} \frac{x}{\tan x} = 1$	$\lim_{x\to0} \frac{\sin m(x-a)}{n(x-a)} = \frac{m}{n}$

C. Beberapa Rumus Bantu

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$
$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$	
Contoh: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{3x^2} = \ldots$ Penyelesaian: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 x}{3x^2} = \dfrac{2}{3}$	

🕮 CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Soal 1

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}\left\{\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{3x^2 + x}\right\} = \ldots$$

A. ∞ B. 0 C. –1 D. $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}$ E. $1 - \sqrt{3}$

✍ **Jawab:**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}\left\{\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{3x^2 + x}\right\} = \lim_{x \to \infty} \left\{\sqrt{1 - \frac{4}{x}} - \sqrt{3 + \frac{1}{x}}\right\} = \sqrt{1-0} - \sqrt{3+0} = 1 - \sqrt{3}$$

Soal 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x - \cos x \sin^2 x}{x^4} = \ldots \ldots$$

A. 0 B. 1/2 C. 1 D. 2 E. 4

✍ **Jawab:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x - \cos x \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - \cos x \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \left(\frac{1 - \cos x}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} 1 \cdot \left(\frac{\sin x}{2x}\right) = \frac{1}{2}$$

Eksponen dan Logaritma

A. Rumus Eksponen

$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$	$(a^m)^n = a^{m.n}$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, a \neq 0$
$(a^m b^n)^p = a^{m.p.} b^{n.p}$	$\left(\dfrac{a^m}{a^n}\right)^p = \dfrac{a^{mp}}{a^{np}}, b \neq 0$	$a^0 = 1$, $a \neq 0$	

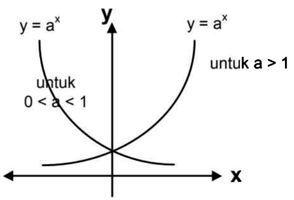
B. Bentuk Akar

$\sqrt[n]{a^n} = a$	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \times \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{a}\sqrt{a}$

C. Persamaan dan Pertidaksamaan Eksponen

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$	$a^{f(x)} = a^{f(x)} \Rightarrow f(x) = 0$
$f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$ maka: • g (x) = h (x) • f (x) = 1 • f (x) = -1, g (x) dan h (x) sama-sama genap/ganjil • f (x) = 0, g (x) dan h (x) sama-sama positif	
Jika $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ maka berlaku : • f (x) > g(x), untuk a > 1 • f(x) < g(x), untuk 0 < a < 1	

D. Fungsi Eksponen



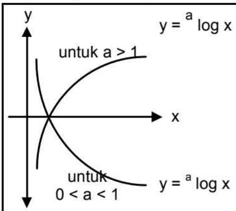
Sifat fungsi eksponen $y = a^x$

- Nilai fungsi definit postif
- Kurva berada di sumbu x
- Memotong sumbu y di (0,1)
- Mempunyai asimptot datar y = 0

E. Sifat-Sifat Logaritma

${}^a\log b + {}^a\log c = {}^a\log bc$	${}^a\log b - {}^a\log c = {}^a\log \frac{b}{c}$
${}^{a^n}\log b^m = \frac{m}{n} \cdot {}^a\log b$	${}^a\log b = \frac{{}^p\log b}{{}^p\log a}$ dengan $0 < p < 1$ atau $p > 1$
${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a}$	$a^{{}^a\log b} = b$
${}^a\log b \cdot {}^b\log c \cdot {}^c\log d = {}^a\log d$	

F. Fungsi Logaritma

	Sifat fungsi logaritma $y = {}^a\log x$ • Kurva berada di sebelah kanan sumbu y • Memotong sumbu x di (1,0) • Mempunyai asimptot tegak x = 0

🕮 CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Pertaksamaan $[{}^2\log(1-x)]^2 - 8 > {}^2\log(1-x)^2$ mempunyai penyelesaian ….

A. $x < -2$ B. $-2 < x < 1$ C. $x > 3/4$ atau $x < -15$
D. $-15 < x < ¾$ E. $3/4 < x < 1$ atau $x < -15$

Jawab:

$[{}^2\log(1-x)]^2 - 8 > {}^2\log(1-x)^2$ → Syarat $1 - x > 0$ → $x < 1$

Misal $p = {}^2\log(1-x)$ → $p^2 - 8 > 2p \Rightarrow p^2 - 2p - 8 > 0$ → $(p-4)(p+2) > 0$

→ $p < -2$ atau $p > 4$ → ${}^2\log(1-x) < -2$ atau ${}^2\log(1-x) > 4$

→ $1 - x < \frac{1}{4}$ atau $1 - x > 16$ → $x > \frac{3}{4}$ atau $x < -15$

Jadi penyelesaiannya : $3/4 < x < 1$ atau $x < -15$

Turunan

A. Fungsi dan Turunan Fungsi

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Turunan Aljabar			
$y = c \rightarrow y' = 0$	$y = x \rightarrow y' = 1$	$y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$	$y = x^2 \rightarrow y' = 2x$
$y = u.v \rightarrow y' = u'v + uv'$		$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	
Turunan Trigonometri			
$y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$	$y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$	$y = \tan x \rightarrow y' = \sec^2 x$	
$y = c \sin^n f(x) \rightarrow y' = n.c \sin^{n-1} f(x).\cos f(x).f'(x)$ **Contoh:** $y = 2\sin^2 2x \rightarrow y' = 4.\sin 2x.\cos 2x.2 = 8\sin 2x.\cos 2x$			
$y = \cot x \rightarrow y' = \text{cosec}^2 x$		$y = \sec x \rightarrow y' = \sec x.\tan x$	
$y = \text{cosec}\, x \rightarrow y' = -\text{cosec}\, x.\cot x$			
Turunan Eksponen dan Logaritma			
$y = \ln f(x) \rightarrow y' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$		$y = e^{f(x)} \rightarrow y' = e^{f(x)}.f'(x)$	
$y = {}^a\log f(x) \rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x).\ln a}$			

B. Nilai Stationer

Kondisi	Syarat	Kondisi	Syarat
Syarat stationer	$y' = 0$	Kurva naik	$y' > 0$
Stationer Maksimum	$y' = 0$ dan $y'' < 0$	Kurva turun	$y' < 0$
Stationer Minimum	$y' = 0$ dan $y'' > 0$	Kurva belok	$y'' = 0$

🕮 CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Soal 1

Diketahui dua bilangan asli yang genap a dan b. Fungsi $f(x) = a^a(1 - x)^b$ mencapai maksimum untuk x = ...

A. $\frac{a}{a+b}$ B. $\frac{b}{a+b}$ C.ab D. $\frac{a}{b}$ E. $a^2 + b^2$

Jawab:

$f(x) = x^a(1-x)^b$, dengan a, b bilangan asli genap.

Syarat stasioner f'(x) = 0, diperoleh :

$a x^{a-1}(1-x)^b + x^a . b(1-x)^{b-1}(-1) = 0 \rightarrow x^{a-1}.(1-x)^{b-1}(a(1-x) - xb)) = 0$

$x^{a-1}.(1-x)^{b-1}(a-(a+b)x)) = 0$

Diperoleh :

$x^{a-1} = 0 \Rightarrow x = 0$ $(1-x)^{b-1} = 0 \Rightarrow x = 1$

$(a-(a+b)x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a}{a+b}$

Soal 2

Luas sebuah lingkaran adalah fungsi dari kelilingnya. Jika keliling sebuah lingkaran adalah x, maka laju perubahan luas lingkaran terhadap kelilingnya adalah..

a. πx b. 2πx c. x/2π d. x/π e. 2x/π

Jawab:

Keliling = 2.π.r = x → r = x/2π

Luas = L = $\pi.r^2 = (\pi)(x/2\pi)^2 \rightarrow \dfrac{dL}{dx} = \dfrac{2x}{4\pi} = \dfrac{x}{2\pi}$

Integral

A. Rumus Dasar

$\int a\ dx = ax + c$	$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c,\ \ n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c,\ \ n \neq -1$
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \sin\ x\, dx = -\cos x + c$	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$
$\int \sin\ ax\ dx = -\frac{1}{a} \cos x + c$	$\int \sin^m x.\cos x\, dx = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x + c$
$\int \cos ax\ dx = \frac{1}{a} \sin x + c$	$\int \cos^m x.\sin x\, dx = \frac{-1}{m+1} \cos^{m+1} x + c$
$\int \tan\ ax\ dx = -\frac{1}{a} \ln\lvert\cos\ ax\rvert + c$	$\int \tan\ ax\ dx = \frac{1}{a} \ln\lvert\sin ax\rvert + c$
$\int \sec^2 ax\ dx = \frac{1}{a} \tan x + c$	$\int \csc^2 ax\ dx = -\frac{1}{a} \cot x + c$
$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$	

B. Integral Substitusi

Rumus: $\int \left[f'(x).(f(x))^n \right] dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$
Contoh: $\int 3x^2 (x^3 - 5)^4 dx = \ldots$
Penyelesaian: Misal: u = $x^3 - 5$ maka $\frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow du = 3x^2 dx$ Maka diperoleh: $\int \underbrace{\left(x^3 - 2\right)^4}_{u} \underbrace{3x^2 dx}_{du} = \int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 + c = \frac{1}{5} (x^3 - 2)^5 + c$

C. Integral Parsial

Rumus: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

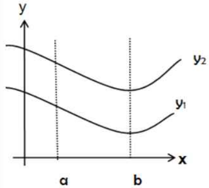
Contoh: $\int x \sin x \, dx = \ldots$

Penyelesaian:

Misal $u = x \rightarrow dv = \sin x \, dx \rightarrow v = \int \sin x \, dx = -\cos x \rightarrow v = -\cos x$

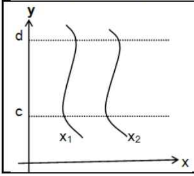
$\int u\,dv = uv - \int v\,du \rightarrow \int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + c$

D. Luas Daerah



$$L = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$$

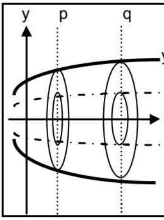
$$L = \int_a^b (y_{atas} - y_{bawah})dx$$



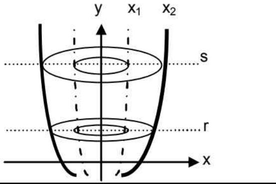
$$Luas = \int_c^d (x_{kanan} - x_{kiri})dy$$

$$Luas = \int_c^d (x_2 - x_1)dy$$

E. Volume Benda Putar



$$Volume = \pi\int_p^q \left(y_2{}^2 - y_1{}^2\right) dx$$

	$\text{Volume} = \pi\int_r^s \left(x_2^{\,2} - x_1^{\,2}\right) dy$

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

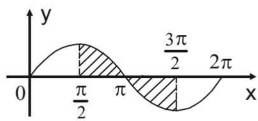
Soal 1

Luas daerah yang dibatasi oleh y = 2 sin x, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ dan sumbu x sama dengan

A. 1 satuan luas B. 2 satuan luas C. 3 satuan luas
D. 4 satuan luas E. 5 satuan luas

Jawab:

$y = 2\sin x,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{3\pi}{2}$



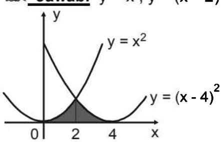
$$L = \int_0^{\pi} 2\sin x\, dx = -2\,[\cos x]_0^{\pi} = -2(-1-1) = 4$$

Soal 2

Luas daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$, $y = (x-4)^2$ dan sumbu-x adalah ....

A. 4 satuan luas B. 13/3 satuan luas C. 14/3 satuan luas
D. 5 satuan luas E. 16/3 satuan luas

Jawab: $y = x^2$, $y = (x-2)^2$, sumbu x



Untuk mencari batas integralnya, kedua kurva dipotongkan, diperoleh :

$(x-4)^2 = x^2 \rightarrow x^2 - 8x + 16 = x^2 \rightarrow 4x = 4 \rightarrow x = 2$

$$L = L_1 + L_2 = \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^4 (x-4)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_2^4$$

$$= \frac{1}{3}(8-0) + \frac{1}{3}\left((0)^3 - (-2)^3\right) = \frac{1}{3}(8) + \frac{1}{3}(0-(-8)) = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

Matriks

Transpose Matriks (A^t)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

Operasi Pada Matriks

1. Penjumlahan dan Pengurangan

Contoh: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ **Syarat:** ordo kedua matriks harus sama.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Perkalian Matriks

a. Perkalian Matriks dengan Matriks

Syarat: Banyaknya kolom A sama dengan Banyaknya baris B

Contoh: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Maka: $A \times B = \begin{pmatrix} 1.1 + 2.4 & 1.2 + 2.5 & 1.3 + 2.6 \\ 3.1 + 4.4 & 3.2 + 4.5 & 3.3 + 4.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{pmatrix}$

b. Perkalian Bilangan dengan Matriks

$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$ **Contoh:** $2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 & 2.2 \\ 2.3 & 2.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Determinan Matriks

Matriks 2 x 2

Contoh: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Determinan matriks *A*: $\det A = |A| = ad - bc$

Matriks 3 x 3

Contoh: $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\det B = |B| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

det B = (a.e.i + b.f.g + c.d.h) – (g.e.c + h.f.a + i.d.b)

Invers Matriks

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ Matriks akan mempunyai invers jika determinannya tidak nol.

- det $A = 0$ → **matriks singular**
- det $A \neq 0$ → matriks **non-singular**

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1.4 - 2.3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Matriks Identitas

$$I_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat Matriks

$(A^{-1})^{-1} = A$	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	$A.X = B \rightarrow X = A^{-1}B$
$X.A = B \rightarrow X = B\,A^{-1}$	$\det(A^t) = \det(A)$	$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
$\det(A.\,B) = \det(A)\,.\det(B)$		

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Diketahui $A^T = \begin{pmatrix} 2p & p \\ q & q \end{pmatrix}$ dan $B^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Jika $C = AB + p\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan det C menyatakan determinan C, maka ....

A. det C > 0 B. det C < 0 C. det C $\geq$ 0 D. det C $\leq$ 0 E. det C = 0

Jawab:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2p & p \\ q & q \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2p & q \\ p & q \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = AB + p\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p & q \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -p \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p - q & p + q \\ p - q & 2p + q \end{pmatrix}$$

$\det(C) = (2p - q)(2p + q) - (p + q)(p - q) = 4p^2 - q^2 - p^2 + q^2 = 3p^2$,
Sehingga dapat disimpulkan det (C) $\geq$ 0

Deret

A. Deret Aritmatika

Suku pertama	$U_1 = a$
Beda	$b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \ldots = U_n - U_{n-1}$
Suku ke-n	$U_n = a + (n-1).b = S_n - S_{n-1}$
Suku tengah	$U_t = \frac{a + U_n}{2} = \frac{S_n}{n}$
Jumlah n suku pertama (S_n)	$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)b\right]$ atau $S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$
Contoh: 2, 4, 6, 8, 10 a = 2; b = 4 – 2 ; $S_5 = \frac{5}{2}(2+10) = 30$; $U_t = \frac{S_n}{n} = \frac{S_5}{5} = \frac{30}{5} = 6$	

B. Deret Geometri

Suku pertama	$U_1 = a$
Rasio	$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_n}{U_{n-1}}$
Suku ke-n	$U_n = ar^{n-1} = S_n - S_{n-1}$
Suku tengah	$U_t = \sqrt{a.U_n}$
Jumlah n suku pertama (S_n)	$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ jika $\left\|r\right\| < 1$ $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ jika $\left\|r\right\| > 1$
Hasil kali n suku pertama (H_n)	$H_n = a^n r^{\frac{n}{2}(n-1)}$

C. Deret Geometri Tak Hingga

Deret geometri mempunyai limit jumlah (konvergen) jika: $-1 < r < 1$ atau $\lvert r \rvert < 1$	
Deret geometri tidak mempunyai limit jumlah (divergen) jika: $\lvert r \rvert \geq 1$	
Jumlah deret geometri tak hingga	$Sn = \frac{a}{1-r}$
Jumlah tak hingga dari suku-suku ganjil:	$S_{genap} = \frac{a}{1-r^2}$
Jumlah tak hingga dari suku-suku genap:	$S_{genap} = \frac{ar}{1-r^2}$
Rasio deret geometri tak hingga:	$r = \frac{S_{genap}}{S_{ganjil}}$

🕮 CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Diketahui x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan $x^2 + 5x + a = 0$ dengan x_1 dan x_2 kedua-duanya tidak sama dengan nol. Jika x_1, $2x_2$, dan $-3x_1x_2$ masing-masing merupakan suku pertama, suku kedua dan suku ketiga dari deret geometri dengan rasio positif, maka nilai a sama dengan

A. –6 B. 2 C. 6 D. –6 atau 6 E. 2 atau 3

Jawab:

$x^2 + 5x + a = 0$, akarnya x_1 dan x_2

*) $x_1 + x_2 = -5$ *) $x_1 \cdot x_2 = a$

x_1 dan x_2 keduanya tidak sama dengan nol.

x_1 , $2x_2$, $-3x_1x_2$ merupakan tiga suku berurutan deret geometri dengan $r > 0$, maka berlaku :

$(2x_2)^2 = x_1(-3x_1x_2) \Rightarrow 4x_2 = -3x_1^2$

$x_1 + x_2 = -5 \rightarrow 4x_1 + 4x_2 = -20 \rightarrow 4x_1 + (-3x_1^2) = -20 \rightarrow 3x_1^2 - 4x_1 - 20 = 0$

$\rightarrow (3x_1 - 10)(x_1 + 2) = 0$

$x_1 = \frac{10}{3} \Rightarrow x_2 = -5 - \frac{10}{3} = -\frac{25}{3}$

$x_1 , 2x_2 , -3x_1x_2 \Rightarrow \frac{10}{3} , -\frac{50}{3} , \frac{750}{9}$ bukan merupakan deret geometri.

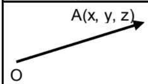
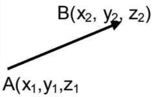
$x_1 = -2 \Rightarrow x_2 = -5 - (-2) = -3$

$x_1 , 2x_2 , -3x_1x_2 \Rightarrow -2 , -6 , -18$ meru-pakan deret geometri.

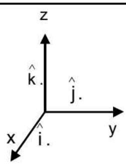
Jadi $a = x_1 \cdot x_2 = (-2)(-3) = 6$

Vektor

A. Vektor dan Operasi Vektor

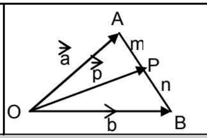
Titik Pangkal Nol	
	$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Panjang vektor $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Titik Pangkal A	
	$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k = (x \quad y \quad z)$ Panjang vektor $\vec{a}$: $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Jika $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ → $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$	
Jika k adalah skalar, dan $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ → $k\bar{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$	
Vektor Kolinear: $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ $k \in$ bilangan real; $k \neq 0$	
Vektor Koplanar: $\vec{c} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b}$ $k, l \neq 0$	

C. Vektor Satuan

$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$ $\hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$ $\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$ 	Vektor satuan: $\vec{a} = \frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}.$
Contoh: Jika A(3, -2, 1) dan B(1, 0, 2) Vektor satuan dari $\overrightarrow{AB}$ adalah? $\overline{AB} = B - A = (1, \quad 0, \quad 2) - (3, \quad -2, \quad 1) = (-2, 2, 1)$ → $\lvert\overline{AB}\rvert = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$ Vektor satuan → $\overline{AB} = \frac{\overline{AB}}{\lvert\overline{AB}\rvert} = \frac{(-2, 2, 1)}{3} = -\frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k$	

D. Rumus Pembagian Ruas Garis

Jika $\vec{p}$ adalah vektor posisi dari titik P yang membagi garis AB dengan perbandingan $\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$, maka: $\vec{p} = \dfrac{m.\vec{b} + n \cdot \vec{a}}{m+n}$



Aturan Pembagian Garis

A P B	AP : PB = 1 : 1 dan AP : AB = 1 : 2
A P B	AP : PB = 2 : 1 dan AP : AB = 2 : 3
A B P	AP : PB = 4 : -2 dan AP : AB = 4 : 2
P A B	AP : PB = -1 : 4 dan AP : AB = -1 : 3

E. Perkalian Titik/Skalar (Dot Product)

Diketahui $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Jika $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ dan $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \theta \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta \rightarrow \cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

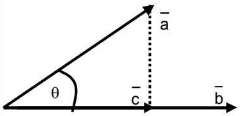
Jika $\theta = 90° \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ Jika $\theta = 90° \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

E. Perkalian Vektor

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$

$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i}|a_2 b_3 - b_2 a_3| - \hat{j}|a_1 b_3 - b_1 a_3| + \hat{k}|a_1 b_2 - b_1 a_2|$

F. Proyeksi



Besar $\vec{c}$ (panjang vektor proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$):

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

Vektor $\vec{c}$ proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$: $\vec{c} = \left[\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\right]\cdot\vec{b}$

🕮 CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Diberikan vektor-vektor sebagai berikut:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ p \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Jika panjang proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah 1 dan vektor $\vec{b}$ tegak lurus dengan vektor $\vec{c}$, maka nilai p + q adalah ……

a. -1 b. 0 c.1d. 2 e.3

✍ **Jawab:**

Panjang proyeksi $\vec{b}$ pada $\vec{a}$ adalah 1

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|} = 1 \rightarrow \frac{2+2\sqrt{2}+p\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}} = 1 \rightarrow \frac{2+2\sqrt{2}+p\sqrt{2}}{2} = 1 \rightarrow 2+2\sqrt{2}+p\sqrt{2} = 2$$

$\rightarrow$ p = -2

Vektor $\vec{b}$ tegak lurus dengan vektor $\vec{c}$ $\rightarrow$ $\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$

$\rightarrow 0+2\sqrt{2}q+p\sqrt{2} = 2 \rightarrow 0+2\sqrt{2}q-2\sqrt{2} = 2 \rightarrow 2\sqrt{2}q = 2\sqrt{2} \rightarrow q = 1$

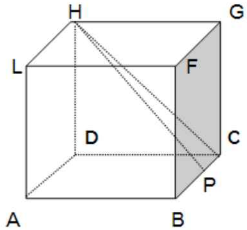
Jadi p + q = -2 + 1 = -1

Dimensi Tiga

Menentukan Jarak Antara Dua Titik

Pada kubus ABCD.EFGH yg berusuk a, berapa jarak titik H ke titik pertengahan BC.

Penyelesaian:



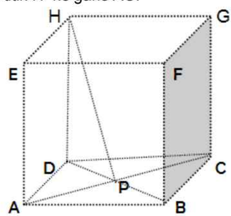
$$HP = \sqrt{CH^2 + CP^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2}a)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4}a^2} = \frac{3}{2}a$$

Jarak Titik Ke Garis

Pada kubus ABCD.EFGH yang berusuk 4 cm, tentukan jarak titik H ke garis AC.

Penyelesaian:



$$DP = \frac{1}{2}BD$$

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$DP = \frac{1}{2}DP = \frac{1}{2}.4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

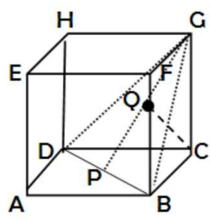
$$HP = \sqrt{DH^2 + DP^2} = \sqrt{4^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Jarak Antara Titik dengan Bidang

Diketahui sebuah kubus dengan panjang a. Tentukan jarak antara titik C dan bidang BDG pada kubus ABCD.EFGH

Penyelesaian:

CQ merupakan jarak dari C ke bidang BDG. Titik Q terletak pada garis GP. Titik P terletak di tengah BD karena BG = DG.



$$BP = \frac{1}{2}BD$$

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

$$BP = \frac{1}{2}DP = \frac{1}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

$$GP = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{6}$$

Jarak dari titik C ke garis GP →Gunakan perbandingan:

$$\frac{CQ}{CG}=\frac{CP}{GP} \rightarrow CQ = \frac{CP.CG}{GP}=\frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right).a}{\left(\frac{a}{2}\sqrt{6}\right)}=\frac{\sqrt{2}.a}{\sqrt{6}}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$$

Menentukan Sudut

Suatu limas beraturan T.PQRS dengan TP = TQ = TR = TS = $\sqrt{21}$ cm dan PQRS adalah suatu persegi dengan panjang sisi 6 cm. Berapa besar sudut antar bidang TQR dan bidang alas sama.

Sudut antara bidang TQR dan bidang PQRS misalnya α .

TP = TQ = TR = TS = $\sqrt{21}$ cm

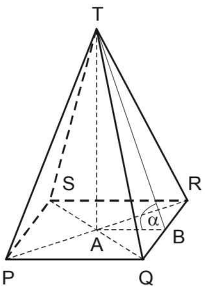
PQ = QR = RS = SP = 6 cm

QB = BR = AB = 3 cm

$$TB = \sqrt{TQ^2 - QB^2} = \sqrt{21-9} = 2\sqrt{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{AB}{TB} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

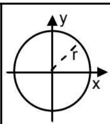
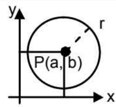
diperoleh α = 30^0.



Irisan Kerucut: Lingkaran

A. Persamaan Umum Lingkaran

Persamaan Umum Lingkaran
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ Pusat $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ Jari-jari r = $\sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$
Kedudukan Titik Terhadap Lingkaran
L: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ dan sebuah titik A (x_1, y_1). Kedudukan titik A (x_1, y_1) terhadap lingkaran L adalah: $K = x_1^2 + y_1^2 + 2ax_1 + 2by_1 + c$ • K > 0 maka titik A (x_1, y_1) berada di luar lingkaran. • K < 0 maka titik A (x_1, y_1) berada di dalam lingkaran. • K = 0 maka titik A (x_1, y_1) berada pada lingkaran.

Persamaan lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari sebesar r: $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$	
Persamaan lingkaran dengan pusat (a, b) dan jari-jari sebesar r: $\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$	
Persamaan lingkaran dengan pusat (a, b) dan menyinggung sumbu x:	$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2}$
Persamaan lingkaran dengan pusat (a, b) dan menyinggung sumbu y:	$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2}$
Persamaan lingkaran dengan pusat (a, b) dan menyinggung garis px + qy + r = 0	Jari-jari lingkaran adalah d: $d = \left\lvert \frac{ap + bq + r}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right\rvert$ $\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = d^2}$

Persamaan Garis Singgung Pada Lingkaran	
Diketahui titik singgungnya (x_1, y_1)	Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ di titik (x_1, y_1) **Rumus:** $x_1 . x + y_1 . y = r^2$
	Persamaan garis singgung pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ di titik (x_1, y_1) **Rumus:** $(x - a).(x_1 - a) + (y – b).(y_1 - b) = r^2$
	Persamaan garis singung di titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ **Rumus:** $x_1. x + y_1. y + a(x_1 + x) + b(y_1 + y) + c = 0$
Diketahui gradien m	Persamaan garis singgung dengan gradien m pada lingkaran yang berpusat di titik O (0, 0) dan jari-jari r **Rumus:** $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$
	Persamaan garis singgung dengan gradient m pada lingkaran $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$ **Rumus:** $y – b = m (x – a) \pm r \sqrt{1+m^2}$

🕮 CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Diketahui suatu lingkaran dengan titik pusat berada pada kurva $y = \sqrt{x}$ dan melalui titik asal O (0, 0). Jika absis titik pusat lingkaran tersebut adalah a, maka persamaan garis singgung yang melalui titik O adalah …

a. $y = -x$ b. $y = -x\sqrt{a}$ c. $y = -ax$ d. $y = -2x\sqrt{2}$ e. $y = -2ax$.

✍ **Jawab:**

Pusat lingkaran pada $y = \sqrt{x}$, absis pusat lingkaran a → $P(a, \sqrt{a})$ → $R = \sqrt{a^2 + a}$

Persamaan garis singgung $(x_1 - a)(x – a) + (y_1 - \sqrt{a})(y – \sqrt{a}) = a^2 + a$ melalui (0, 0):

→ $(0 - a)(x – a) + (0 - \sqrt{a})(y – \sqrt{a}) = a^2 + a$ → $- ax – a^2 + \sqrt{a}\, y – a = a^2 + a$

→ $- ax – \sqrt{a}\, y = 0$ →→ $y = \frac{a}{\sqrt{a}} x$ → $y = -x\sqrt{a}$

Irisan Kerucut: Parabola

A. Persamaan Parabola

Puncak (a,b) dan Bentuk Rebah	
Persamaan parabola:	$(y - b)^2 = 4p(x - a)$
Fokus	$(a + p, b)$
Garis direktris	$x = a - p$
Lactus Rectum	$\|4p\|$
Puncak (a,b) dan Bentuk Tegak	
Persamaan parabola:	$(x - a)^2 = 4p(y - b)$
Fokus	$(a, b + p)$
Garis direktris	$x = b - p$
Lactus Rectum	$\|4p\|$

B. Persamaan Garis Singgung

Melalui Titik (x_1, y_1) pada Parabola	
Untuk $y^2 = 4px$	$y_1y = 2p(x + x_1)$
Untuk $x^2 = 4py$	$X_1x = 2p(y + y_1)$
Untuk $(y - b)^2 = 4p(x - a)$	$(y_1 - b)(y - b) = 2p(x_1 + x2a)$
Untuk $(x - a)^2 = 4p(y - b)$	$(x_1 - b)(x - b) = 2p(y_1 + y2a)$
Bergradien m	
Untuk $y^2 = 4px$	$y = mx + p/m$
Untuk $x^2 = 4py$	$y = mx + m^2p$
Untuk $(y - b)^2 = 4p(x - a)$	$y - b = m(x - a) + p/m$
Untuk $(x - a)^2 = 4p(y - b)$	$y - b = m(x - a) + m^2p$

Irisan Kerucut: Elips

A. Persamaan Elips

Pusat (0, 0) dan Bentuk Rebah	
Bentuk persamaan	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, a > b dan $c^2 = a^2 - b^2$
Puncak	(± a, 0)
Fokus	(± c, 0)
Eksentrisitas	e = c/a
Direktris	$x=\pm\frac{a^2}{c}$
Panjang Lactus Rectum	$=2\frac{b^2}{a}$
Panjang Sumbu	Mayor = 2a Minor = 2b
Pusat (0, 0) dan Bentuk Tegak	
Bentuk persamaan	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, a > b dan $c^2 = a^2 - b^2$
Puncak	(0, ± a)
Fokus	(0, ± c)
Eksentrisitas	e = c/a
Direktris	$x=\pm\frac{a^2}{c}$
Panjang Lactus Rectum	$=2\frac{b^2}{a}$
Panjang Sumbu	Mayor = 2a Minor = 2b

Pusat (h, k) dan Bentuk Rebah	
Bentuk persamaan	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, a > b
Puncak	(± a + h, k)
Fokus	(± c + h, k)
Eksentrisitas	e = c/a
Direktris	$x=h\pm\frac{a}{c}$
Panjang Lactus Rectum	$=2\frac{b^2}{a}$
Panjang Sumbu	Mayor = 2a Minor = 2b
Pusat (h, k) dan BentukTegak	
Bentuk persamaan	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, a > b
Puncak	(h, ± a + k)
Fokus	(h, ± c + k)
Eksentrisitas	e = c/a
Direktris	$x=k\pm\frac{a}{c}$
Panjang Lactus Rectum	$=2\frac{b^2}{a}$
Panjang Sumbu	Mayor = 2a Minor = 2b

B. Persamaan Garis Singgung

Melalui Titik (x_1, y_1) pada Elips	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$)
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)(x_1-h)}{a^2}+\frac{(y-k)(y_1-k)}{b^2}=1$

Bergradien m	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$y - k = m(x-h) \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

C. Hubungan dengan Garis

Langkah-langkah Mencari Hubungan
1. Substitusikan garis ke persamaan elips
2. Tentukan D a. Jika $D > 0$ → berpotongan di 2 titik b. Jika $D = 0$ → bersinggungan c. Jika $D < 0$ → tidak berpotongan atau bersinggungan

🕮 CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Titik A dan B terletak pada elips $16x^2 + 9y^2 + 64x - 72y + 64 = 0$. Jarak terbesar yang mungkin dari A ke B adalah ….

a. 4 b. 6 c. 8 d. 12 e. 16

✍ **Jawab:**

Elips $16x^2 + 9y^2 + 64x - 72y + 64 = 0$ → $a^2 = 16$ dan $b^2 = 9$ → $a = 4$ dan $b = 3$

Jadi sumbu mayor = 2a = 2 (4) = 8

Irisan Kerucut: Hiperbola

A. Persamaan Hiperbola

Pusat (0, 0) dan Bentuk Rebah	
Bentuk persamaan	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $c^2 = a^2 + b^2$
Puncak	(± a, 0)
Fokus	(± c, 0)
Eksentrisitas	e = c/a
Direktris	$x = \pm \frac{a^2}{c}$
Panjang Lactus Rectum	$= 2\frac{b^2}{a}$
Panjang Sumbu	Mayor = 2a Minor = 2b
Asimtot miring	$y = \pm \frac{b}{a}x$
Pusat (0, 0) dan Bentuk Tegak	
Bentuk persamaan	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
Puncak	(0, ± a)
Fokus	(0, ± c)
Eksentrisitas	e = c/a
Direktris	$x = \pm \frac{a^2}{c}$
Panjang Lactus Rectum	$= 2\frac{b^2}{a}$
Panjang Sumbu	Mayor = 2a Minor = 2b
Asimtot miring	$y = \pm \frac{b}{a}x$

Pusat (h, k) dan Bentuk Rebah	
Bentuk persamaan	$\frac{(x-k)^2}{a^2} - \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1 \qquad c^2 = a^2 + b^2$
Puncak	$(\pm a + h, k)$
Fokus	$(\pm c + h, k)$
Eksentrisitas	$e = c/a$
Direktris	$x = h \pm \frac{a}{c}$
Panjang Lactus Rectum	$= 2\frac{b^2}{a}$
Panjang Sumbu	Mayor = 2a Minor = 2b
Asimtot miring	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$
Pusat (h, k) dan BentukTegak	
Bentuk persamaan	$\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$, $a > b$
Puncak	$(h, \pm a + k)$
Fokus	$(h, \pm c + k)$
Eksentrisitas	$e = c/a$
Direktris	$x = k \pm \frac{a}{c}$
Panjang Lactus Rectum	$= 2\frac{b^2}{a}$
Panjang Sumbu	Mayor = 2a Minor = 2b
Asimtot miring	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$

B. Persamaan Garis Singgung

Melalui Titik (x_1, y_1) pada Parabola	
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$)
$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)(x_1-h)}{a^2}-\frac{(y-k)(y_1-k)}{b^2}=1$
Bergradien m	
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2-b^2}$
$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2-a^2}$
$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$y-k = m(x-h) \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$
$\frac{(y-h)^2}{a^2}-\frac{(x-k)^2}{b^2}=1$	$y-k = m(x-h) \pm \sqrt{b^2m^2+a^2}$

🕮 CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Salah satu asimtot $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$ sejajar dengan garis $6x - 3y + 5 = 0$ maka nilai b^2=

a.1/4 b.1 c. 4 d. 16 e. 25

✍ **Jawab:**

Hiperbola $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$ → a = 2 → Asimtot: = $\pm\frac{b}{a}x$ → m_1= $\frac{b}{a}$ → m_1= $\frac{b}{2}$

Garis $6x - 3y + 5 = 0$ → $m_2 = 2$

Karena sejajar maka $m_1 = m_2$ → $\pm\frac{b}{2}$ = 2 → b = ±4 → $b^2 = 16$

Suku Banyak

A. Nilai Suku Banyak

Cara Substitusi

Contoh:
Jika f (x) = $x^4 - 2x^3 + x + 5$ maka nilai suku banyak tersebut untuk x = 1 adalah?
Penyelesaian: f (x) = $(1)^4 - 2.(1)^3 + 1 + 5 = 5$

Metode Horner

Jika $ax^4 - bx^2 + cx + d$ adalah suku banyak maka f (h) diperoleh cara sebagai berikut.

$$
\begin{array}{c|cccc l}
h & a & b & c & d & \\
 & \downarrow & a.h & a.h^2+bh & a.h^3+bh^2+ch & + \\
\hline
 & a & a.h+b & a.h^2+bh+c & a.h^3+bh^2+ch+d &
\end{array}
$$

Contoh:
Hitunglah: f (4) jika $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x - 20$

$$
\begin{array}{c|cccc l}
4 & 2 & 4 & 2 & -20 & \\
x & \downarrow & 8 & 48 & 200 & + \\
\hline
 & 2 & 12 & 50 & 180 &
\end{array}
$$

Langkah-langkah:
1). 2 turun <u>dikali 4</u> → 4 x 2 = 8
2). 4 turun menambah 8 lalu <u>dikali 4</u> → 4 + 8 = 12 → 12 x 4 = 48
3). 2 turun menambah 48 lalu <u>dikali 4</u> → 2 + 48 = 50 → 50 x 4 = 200
4). -20 turun menambah 200 dan <u>tidak dikali 4</u> → -20 + 200 = 180
Jadi f (4) = 180

B. Mencari Akar Suku Banyak

Salah satu akar-akar persamaan $x^3 - x^2 - 30x + 72 = 0$ adalah 3. Tentukan akar-akar lainnya.

$$
\begin{array}{c|cccc}
3 & 1 & -1 & -30 & 72 \\
 & & + & + & + \\
x & & 3 & 6 & -72 \\
\hline
 & 1 & 2 & -24 & 0
\end{array}
$$

Langkah-langkah:

1). 1 turun <u>dikali 3</u> → 3 x 1 = 3

2). -1 turun menambah 3 lalu <u>dikali 3</u> → -1 + 3 = 2 → 2 x 3 = 6

3). -30 turun menambah 6 lalu <u>dikali 3</u> → -30 + 6 = -24 → -24 x 3 = 72

4). -72 turun menambah 72 dan <u>habis</u> → -72 + 72= 0

Jadi: $(x - 3)(x^2 + 2x + -24) = 0 \rightarrow (x - 3)(x + 6)(x - 24) = 0$

Maka akar-akarnya: $x_1 = 3$, $x_2 = -6$, $x_3 = 24$

C. Teorema Sisa

Konsep 1

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{s(x)}{g(x)} \rightarrow f(x) = h(x).g(x) + s(x)$$

dimana: f(x) = yang dibagi; h(x)= hasil bagi; g(x) = pembagi; s(x) = sisa.

Derajat s(x) ≤ derajat g(x) - 1

Konsep 2

$f(x)$ dibagi $(ax - b)$ maka sisanya = $f\left(\frac{b}{a}\right)$

$(ax - b)$ habis dibagi suku banyak $f(x)$ maka $f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$

Konsep 3

f(x) jika dibagi (x – a) maka sisanya = f (a)

(x - a) habis dibagi suku banyak f(x) maka f (a) = 0

Konsep 4

Jika f (a). f (b) < 0 maka f (x) = 0 mempunyai akar nyata di antara x = a dan x = b

D. Teorema Faktor

Jika f (a) = S = 0, sehingga a merupakan pembuat nol suku banyak f (a), maka (x – a) adalah faktor dari suku banyak f (k).
Jika pada suku banyak f (x) berlaku f (a) = 0 dan f (b) = , maka f (x) habis dibagi (x – a) (x – b).
Jika (x – a) adalah faktor dari f (x), maka x = a adalah akar dari f (x).

E. Operasi Akar-akar Pada Suku Banyak

Fungsi derajat tiga: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$		
$x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}$	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\dfrac{c}{a}$	$x_1.x_2.x_3 = \dfrac{d}{a}$

Fungsi derajat empat: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$	
$x_1 + x_2 + x_3 + x_3 = -\dfrac{b}{a}$	$x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a}$
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -\dfrac{c}{a}$	$x_1.x_2.x_3.x_4 = \dfrac{e}{a}$

🕮 CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Nilai m + n yang mengakibatkan $x^4 - 6ax^3 + 8a^2x^2 - ma^3x + na^4$ habis dibagi $(x - a)^2$ adalah

A. 2 B.1 C. 0 D. –1 E. –2

Jawab:

$x^4 - 6ax^3 + 8a^2x^2 - ma^3x + na^4$ habis dibagi $(x - a)^2$, m + n = ?

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4ax - a^2 \\
\hline
x^2 - 2ax + a^2 & x^4 - 6ax^3 + 8a^2x^2 - ma^3x + na^4 \\
 & x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 \quad - \\
 & \quad -4ax^3 + 7a^2x^2 - ma^3x + na^4 \\
 & \quad -4ax^3 + 8a^2x^2 - 4a^3x \quad - \\
 & \qquad -a^2x^2 - (ma^3 - 4a^3)x + na^4 \\
 & \qquad -a^2x^2 + 2a^3x - a^4 \quad - \\
 & \qquad\quad -(ma^3 - 2a^3)x + (n + 1)a^4
\end{array}
$$

Habis dibagi, maka sisa = 0 = 0x + 0 → sisa = $-(ma^3 - 2a^3)x + (n + 1)a^4$

Sehingga diperoleh → $ma^3 - 2a^3 = 0 \Rightarrow m = 2$

$(n + 1)a^4 = 0 \Rightarrow n = -1$ → Jadi m + n = 2 – 1 = 1

Transformasi

Translasi (Pergeseran)

$$P(x, y) \xrightarrow{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} P'(x + a, y + b)$$

Refleksi (Pencerminan)

Terhadap Sumbu x

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow Mx = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Terhadap Sumbu y

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow My = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Terhadap Titik (0, 0)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow M0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Terhadap Titik (a, b)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Terhadap Garis x = a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Terhadap Garis y = b

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Terhadap Garis y = x

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow M_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Terhadap Garis y = -x

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow M_{y=-x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Terhadap Garis y = mx

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Terhadap Garis y = mx + c

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Rotasi (Pusat a, b)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Dengan Rotasi sebesar α

Dilatasi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

🕮 CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

Oleh matriks $A = \begin{pmatrix} a+2 & a \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ titik P (1, 2) dan titik Q masing-masing ditransformasikan ke titik P' (2, 3) dan ke titik Q (2,0). Koordinat titik Q adalah

A. (1, -1) B. (-1,1) C. (1, 1) D. (–1, -1) E. (1, 0)

✍ **Jawab:**

Matriks transformasi $A = \begin{pmatrix} a+2 & a \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ ans

- P (1,2) → P' (2, 3)

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 & a \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ → 2 = a + 2 + 2a → a = 0

- Q (x, y) → Q' (2, 0)

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 & a \\ 1 & 0+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2-0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Maka koordinat titik Q (1, -1)