DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRET

Kursiguru.com

1. Distribusi Binomial Negatif

Seperti yang dijelaskan pada subbab sebelumnya, distribusi binomial merupakan percobaan yang terdiri atas ulangan-ulangan dengan pemulihan yang mempunyai dua kemungkinan. Sekarang, kita akan mencoba suatu percobaan yang mirip dengan binomial, tetapi dengan pengulangan yang terus-menerus sampai terjadi sejumlah keberhasilan tertentu. Jadi, alih-alih menentukan probabilitas sebanyak x keberhasilan dalam n ulangan yang ditetapkan sebelumnya. Distribusi probabilitas semacam ini dikenal sebagai distribusi binomial negatif yang dinotasikan dengan b*(x : n : p).

Bila x menyatakan banyaknya ulangan yang menghasilkan x keberhasilan, probabilitas terjadinya keberhasilan pada ulangan bebas ke n didahului oleh n -1 keberhasilan dan n – x kegagalan, distribusi peubah acak x merupakan banyaknya ulangan sampai terjadinya x keberhasilan. Akan tetapi, karena masing-masing ulangan bebas satu sama lain, mereka perlu dikalikan dengan semua probabilitas p dan kegagalan dengan q = 1 – p. Dengan demikian, probabilitas urutannya berakhir pada keberhasilan, yaitu $p^x\ q^{n-x}$. Sekarang tinggal menghitung banyaknya kombinasi yang mempunyai keberhasilan x dan kegagalan (n – x). Bilangan ini tidak lain adalah suatu kombinasi (n – 1, x – 1).

Selanjutnya banyak titik kombinasi ini dikalikan dengan $p^x.q^{n-x}$ untuk mendapatkan rumus umum distribusi binomial negatif. Dengan kata lain, jika suatu percobaan binomial negatif mempunyai probabilitas keberhasilan p dan probabilitas kegagalan q, distribusi probabilitas peubah acak x adalah banyaknya ulangan sampai terjadinya x keberhasilan sehingga secara matematis distribusi binomial negatif dirumuskan menjadi

Rumus 1.7

$$b^*(x : n : p) = (n -1, x-1)\ p^x \cdot q^{n-x}$$

dengan x = n, n+1, n+2

contoh :

1. Seorang peneliti tengah menginokulasi beberapa tikus putih dengan menyuntikkan virus yang menyerang metabolisme pencernaan sampai ia memperoleh 3 ekor tikus putih terserang penyakit tersebut. Bila probabilitas terjangkit penyakit itu adalah 25%, berapa probabilitas bahwa dalam percobaan itu diperlukan 10 ekor tikus

   Jawab

   b.(3 : 10 : 0.25) = (9 2) $(0.25)^3$. $(0.75)^7$
   = 9! / 2! (9 – 2)! . 0.0156 . 0.1335
   = 36 . 0.0156 . 0.1335
   = 0.075

   Jadi probabilitas diperlukannya 10 ekor tikus putih untuk 3 ekor tikus yang terserang penyakit adalah 0.075 atau 7.5%

2. Menurut hasil penelitian ahli sosiologi, kurang lebih 800 dari 1000 wanita tidak setuju dengan praktik poligami yang dilakukan para suami. Bila hasil penelitian ini benar, hitunglah probabilitas bahwa pada suatu hari tertentu, wanita ke empat yang diwawancarai adalah wanita ke empat yang tidak menyetujui poligami

   Jawab

   p = 800 / 1000, x = 4 dan n = 4
   b . (4 : 4 : 8/10) = (3 3) . 8/103 2/100
   = 1 . 0.4096 . 1
   = 0.4096

   Jadi, probabilitasnya wanita ke empat yang diwawancarai merupakan wanita keempat yang tidak setuju dengan poligami adalah adalah 41%

2. Distribusi Geometrik

Distribusi binomial negatif dapat didefinisikan menjadi distribusi geometrik bila x yang menyatakan banyaknya ulangan yang diperlukan telah mencapai satu keberhasilan (x = 1), misalnya pada kasus poligami, hingga wanita yang tidak menyetujui muncul. Mungkin kita ingin mengetahui probabilitas bahwa wanita yang tidak setuju pada poligami muncul pada wawancara ke empat. Dengan demikian distribusi binomial negatifnya akan tereduksi menjadi b.(1 : n : p) atau g(n :p).

Distribusi geometrik yang dapat didefinisikan bila percobaan bebas dan berulang-ulang dapat menghasilkan keberhasilan dengan probabilitas p dan kegagalan dengan probabilitas q=1–p, distribusi probabilitas bagi peubah acak x, yaitu banyaknya ulangan sampai muncul keberhasilan yang pertama, dinyatakan dengan rumus berikut

Rumus 1.8

$$\mathbf{g(n : p) = p\, q^{n-1}}$$

contoh :

1. Menurut hasil penelitian ahli sosiologi, kurang lebih 800 dari 1000 wanita tidak setuju dengan praktik poligami yang dilakukan para suami. Bila hasil penelitian ini benar, hitunglah
   a. Probabilitas bahwa seorang sosiolog memerlukan 3 orang wanita sampai diperoleh wanita yang tidak setuju dengan poligami
   b. Probabilitas bahwa seorang sosiolog memerlukan 3 orang wanita bila diketahui n = 5

   Jawab

   a. Dengan menggunakan distribusi geometrik, diketahui n = 3 dan p = 800/1000

   $$\begin{aligned} g(n : p) &= p.q^{n-1} \\ &= 800/1000 \;.\; (200/1000)^{3-1} \\ &= 0.8 \;.\; 0.2^{2} \\ &= 0.032 \end{aligned}$$

b. n = 5

$g(n : p) = 800/1000 \cdot (200/1000)^{5-1}$

$= 0.8 \cdot (0.2)^4$

$= 0.00128$

3. Distribusi Hipergeometrik

Distribusi hipergeometrik merupakan distribusi data diskret. Probabilitas suatu peristiwa pada percobaan yang akan menghasilkan dua macam peristiwa dependen menghasilkan probabilitas peristiwa yang berbeda pada setiap percobaan. Kondisi ini biasanya muncul pada percobaan yang dilakukan tanpa pengembalian dengan populasi yang terbatas. Dengan kata lain, distribusi hipergeometrik merupakan bentuk probabilitas tanpa pengembalian (*without replacement*), yaitu setiap pencuplikan data yang telah diamati tidak dimasukkan kembali dalam populasi semula (**Algifari, 2010**).

Misalnya suatu kotak berisi 10 buah kelereng. 4 buah kelereng berwarna merah dan 6 buah kelereng berwarna putih. Apabila diambil satu buah kelereng secara acak (*random*), probabilitas terambilnya kelereng berwarna merah adalah 4/10. Apabila dilakukan pengambilan lagi terhadap kelereng yang ada di kotak dan kelereng yang terambil pada pengambilan pertama tidak dikembalikan, probabilitas terambilnya masing-masing kelereng warna merah dan probabilitas kelereng warna putih akan berubah. Misalnya pada pengambilan pertama terambil kelereng warna merah, probabilitas terambilnya kelereng warna merah pada pengambilan kedua adalah 3/9 dan probabilitas terambilnya kelereng warna putih adalah 6/9. Probabilitas terambilnya kelereng warna merah atau kelereng warna putih setiap kali pengambilan akan berbeda-beda pada proses pengambilan tanpa pengembalian.

Bila suatu populasi berukuran N terdiri atas k unsur yang diharapkan muncul (berhasil) dan (N-k) unsur yang tidak muncul (gagal), pencuplikan n contoh adalah populasi berukuran N, probabilitas mendapatkan x yang diharapkan mengikuti fungsi hipergeometrik. Disini semua pengambilan contoh dianggap mempunyai probabilitas terpilih yang sama dan banyaknya kombinasi yang berukuran n dari suatu populasi berukuran N adalah (N n). Analog dengan ini adalah untuk memilih x keberhasilan dari k keberhasilan yang tersedia terdapat (k x) macam kombinasi. Sedangkan banyaknya kombinasi kegagalan dari (n – k) adalah (N-k, n-x). Dengan demikian, banyaknya contoh yang memenuhi syarat diantara kombinasi (N n) adalah (N n) (N-k n-x).

Definisi secara umum dari distribusi probabilitas hipergeometrik bagi peubah acak x adalah bila dari populasi berukuran N yang dapat digolongkan yaitu kelompok keberhasilan dan kelompok kegagalan, masing-masing dengan k dan N-k unsur, dipilih sebanyak n, distribusi probabilitas peubah acak x yang menyatakan banyaknya kejadian berhasil yang terpilih adalah

Rumus 1.9

$$h(x : N : n : k) = (k\ x)\ (N - k, n - x) / (N\ n), \text{ dengan } x = 0, 1, 2, 3 \ldots n$$

3.1 Nilai Rata-rata dan Varian Distribusi Hipergeometrik

Nilai rata-rata distribusi hipergeometrik merupakan hasil kali contoh berukuran n dengan k keberhasilan dibagi dengan N populasinya. Secara matematis dirumuskan sebagai

Rumus 1.10

$$\mu = nK / N$$

Rasio k/N pada rumus di atas setara nilainya dengan probabilitas keberhasilan p sehingga nilai rata-rata dibagi distribusi hipergeometrik dinyatakan dalam persamaan berikut

Rumus 1.11

$$\mu = n.p$$

dan varian bagi distribusi hipergeometrik h(x : N : n : k) adalah

Rumus 1.12

$$\delta 2 = (N\text{-}n / N\text{-}1)\ n\ k/N\ (1 - k/N)$$

Bila n relatif sangat kecil dibandingkan dengan N, probabilitas pada pengambilan akan kecil sekali sehingga dapat dikatakan bahwa percobaan menjadi percobaan binomial, artinya kita dapat menghampiri distribusi hipergeometrik dengan menggunakan distribusi binomial rasio p = k/N. Tampak bahwa varian populasi distribusi binomial pada rumus 1.11 diperoleh dengan mengambil limit dari ragam distribusi hipergeometrik rumus 1.12.

Rumus 1.13

$$\lim_{N\to\infty} N-n / N-1 = \lim_{N\to\infty} (N/N-1 - n/N-1) = 1$$

Dapat dikatakan bahwa pengambilan contoh tanpa pemulihan bisa dianggap sebagai pengambilan contoh dengan pemulihan asalkan ukuran populasi N sangat besar. Atas dasar ini, semua perhitungan dapat dilakukan "seolah-olah" contoh diambil dari pemulihan.

Contoh :

1. Sebuah kantong plastik berisi 5 kelereng merah dan 4 kelereng biru. Kemudian diambil 3 kelereng tanpa pemulihan. Bila x menyatakan banyaknya kelereng merah yang diambil, susunlah fungsi dan distribusi probabilitas hipergeometriknya

   Jawab

   Diketahui N = 9, k = 5, n = 3, N-k= 9 - 5 = 4

   Dengan menggunakan rumus 1.9

   h(x : N : n : k) = (k x) (N – k, n - x) / (N n), diperoleh

   Pada (x = 0) h(0 : 9 : 4 : 5) = (5 0) (4 3) / (9 3)
   = 4/84

   Pada (x = 1) h(1 : 9 : 4 : 5) = (5 1) (4 2) / (9 3)
   = 30/84

   Pada (x = 2) h(2 : 9 : 4 : 5) = (5 2) (4 1) / (9 3)
   = 40/84

   Pada (x = 3) h(3 : 9 : 4 : 5) = (5 3) (4 0) / (9 3)
   = 10/84

   Semua kemungkinan peubah acak x berikut probabilitasnya dapat disusun dalam tabel distribusi berikut

Tabel 1.1 Distribusi sebaran hipergeometrik

x	0	1	2	3
P(X = x)	4/84	30/84	40/84	10/84

Jadi, fungsi distribusi hipergeometrik h(x : 9 : 4 : 5) = (5 x) (4 3-x) / (9 3)

Untuk x = 0, 1, 2, 3

2. 6 kartu diambil secara acak dari ½ kartu bridge (warna merah). Hitunglah probabilitas diperolehnya 4 kartu wajik

   Jawab

   Kita menggunakan distribusi hipergeometrik untuk n = 6 kartu yang diambil dari populasi N = 26 kartu. Banyaknya kartu wajik k = 13 dan x = 4. Maka probabilitas untuk memperoleh 4 kartu wajik dari 6 kartu yang diambil adalah

   h(4 : 26 : 6 : 13) = (13 4) (13 2) / (26 6)

   = 715. 78 / 230230 = 0.242

3.2 Distribusi Hipergeometrik Peubah Ganda

Distribusi hipergeometrik dapat diperluas lagi dengan apa yang disebut distribusi hipergeometrik peubah ganda, yaitu bila suatu populasi yang beranggotakan N disekat ke sel A_1, A_2, … A_k dengan jumlah anggota masing-masing sel a_1, a_2, …a_k. Bila contoh acak berukuran n dapat digolongkan menjadi unsur-unsur dari kelompok A_1, A_2, …A_k dengan anggota masing-masing a_1, a_2, …, a_k, distribusi probabilitas bagi peubah acak x_1, x_2, …, x_k adalah (**Wibisono, 2007**)

Rumus 1.14

h(x1, x2, …, xk : N : n : a1, a2, …, ak) = (a1 x1) (a2 x2) … (ak xk) / (N n)

dengan x1 + x2 + … + xk = n dan a1 + a2 + … + ak = N

contoh :

1. Sebuah kantong berisi 9 kelereng yang terdiri dari 4 kelereng merah, 2 kelereng biru dan 3 kelereng kuning. Tentukan fungsi probabilitas hipergeometrik terpilihnya 1 kelereng merah dan 1 kelereng biru

   Jawab

   Diketahui x1 = 1, x2 = 1, a1 = 4, a2 = 2, a3 = 3, n = 2, N = 9

   Maka probabilitas terpilihnya kelereng merah (x1) dan kelereng biru (x2) dapat dinyatakan dalam probabilitas bersama yaitu :

   h(x1, x2, …, xk : N : n : a1, a2, …, ak) = (a1 x1) (a2 x2) … (ak xk) / (N n)

   h(1,1 : 9 : 2 : 4 : 2) = (4 1) (2 1) (3 0) / (9 2) = 2/9

4. Distribusi Poisson

Kita dapat menghitung distribusi probabilitas binomial untuk percobaan dengan probabilitas sukses atau berhasil kurang dari 0.05. Namun, perhitungan tersebut akan sangat tidak efektif dan akurat (khususnya untuk n yang sangat besar, misalnya 100 atau lebih). Semakin kecil probabilitas sukses, distribusi probabilitasnya akan semakin melenceng. Oleh karena itu, dikembangkan satu bentuk distribusi binomial yang mampu mengkalkulasikan distribusi probabilitas dengan kemungkinan sukses atau berhasil sangat kecil dan jumlah eksperimen (n) sangat besar yang disebut distribusi Poisson (Haryono, 2009).

Oleh karena itu, penggunaan distribusi poisson sangat membantu untuk menghitung probabilitas pada percobaan dengan n relatif besar. Distribusi poisson merupakan distribusi peubah acak dimana hasil percobaan terjadi selama waktu tertentu atau di suatu daerah tertentu. Distribusi ini secara luas sering dipakai terutama dalam proses simulasi, misalnya banyaknya dering telpon dalam satu jam di suatu kantor, banyaknya kesalahan ketik dalam satu halaman laporan, dan sebagainya. Menurut Benson (2008), percobaan poisson memiliki ciri-ciri sebagai berikut :

1. Banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada suatu selang tertentu atau daerah tertentu tidak bergantung pada banyaknya hasil percobaan pada selang waktu atau daerah lain
2. Probabilitas terjadinya satu hasil percobaan selama selang waktu tertentu yang singkat sekali atau daerah lain yang kecil, sebanding dengan panjang selang waktu atau daerah lain, juga tidak tergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi di luar selang waktu atau daerah lain
3. Probabilitas bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi dalam selang waktu yang singkat atau daerah kecil dapat diabaikan

Perhatikan bentuk umum probabilitas binomial :

$$\mathbf{b(x, n, p) = (n\,(n - 1).(n - 2)\ldots(n - x+1) / x!\,)\,.\,p^{x}\,.q^{n-x}}$$

Oleh karena rata-rata distribusi binomial adalah μ = n.p dengan mengatur kembali suku-suku ruas kanan, selanjutnya

$$\mathbf{b(x, n, p) = (n/n).\ (n\text{-}1/n)\ \ldots(1 - \mu/n)^{-x}\,(\mu^{x} / x!)(1 - \mu/n)^{n}}$$

pada n = ∞, limit suku-suku dalam kurung bawah sama dengan 1. Selanjutnya dicari suku terakhir pada ruas kanan, yaitu :

$(1 - \mu/n)^n = (1 - \mu/n)^{-(-n/\mu)\mu} = e^{-\mu}$

Untuk percobaan n yang cukup besar, distribusi binomial akan menjadi distribusi poisson yang sering dituliskan p(X, μ). Nilai-nilai probabilitas distribusi poisson hanya bergantung pada parameter μ, yaitu rata-rata banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama selang waktu tertentu atau daerah lain yang diberikan. Dengan demikian, rumus umum distribusi poisson adalah sebagai berikut

Rumus 1.15

$$p(X, \mu) = e^{-\mu} \mu^x / x!$$

keterangan :

p(X, μ) = probabilitas x dengan μ tertentu

μ = banyaknya sukses yang diharapkan

e = suatu konstanta matematis yang nilainya mendekati 2,71828

x = banyaknya sukses setiap unit

Distribusi poisson merupakan turunan langsung dari distribusi binomial bila jumlah percobaan lebih dari 20 amatan dan probabilitas $p \leq 0.05$. dalam hal demikian, rata-rata binomial akan diganti dengan rata-rata poisson.

Contoh :

1. Rata-rata banyaknya tikus per hektar yang menyerang tanaman padi adalah 8 ekor. Hitunglah probabilitas bahwa dalam 1 hektar terdapat lebih dari 13 ekor

   Jawab

   Bila x menyatakan banyaknya tikus per hektar tanaman padi, probabilitas lebih dari 13 ekor tikus per hektarnya adalah

   $P(x > 13) = 1 - P(x \leq 13)$

   $= 1 - \Sigma_{0..13}\, e^{-8}\, 8^x / x!$

   $= 1 - 0.9658$

   $= 0.0342$

Contoh Soal:

1. Ujian statistik lannjutan terdiri dari 10 nomor soal pilihan ganda. Hitunglah probabilitas untuk memperoleh :
   a. Tepat 7 jawaban benar
   b. Lebih dari 6 jawaban benar
   c. 2 – 8 jawaban benar untuk seorang mahasiswa yang menjawab soal dengan cara menebak-nebak saja

2. Suatu persilangan kacang buncis Mm x Mm menghasilkan keturunan berwarna merah, jambon dan putih dengan perbandingan 1 : 2 : 1. Hitunglah probabilitas diantara 6 keturunan kacang buncis jika ada 1 yang berwarna merah (MM), 3 warna jambon (Mm) dan 2 warna putih (mm)

3. Seorang satpam disebuah diskotik memeriksa secara acak 3 kartu identitas dari 8 pengunjung dimana 2 diantaranya belum cukup umur. Berapa probabilitas bahwa satpam akan menolak 2 pengunjung yang ketahuan belum cukup umur?

4. Sebuah tim penelitian yang beranggotakan 6 orang dipilih dari 10 orang (6 orang laki-laki dan 4 orang wanita). Bila x menyatakan banyaknya wanita yang terpilih sebagai anggota tim peneliti, hitunglah :
   a. Rata-rata dan ragam wanita dalam tim tersebut
   b. Tidak lebih dari 2 orang wanita
   c. Tuliskan rumus bagi distribusi peubah acak x

5. Sebuah tas berisi 5 pensil hijau, 2 pensil biru, dan 4 pensil merah. Bila 4 pensil diambil secara acak, hitunglah :
   a. Probabilitas terambilnya 2 pensil hijau dan sekurang-kurangnya 1 pensil biru
   b. 1 pensil hijau, 1 pensil biru dan 2 pensil merah

6. Sebuah keluarga merencanakan memiliki 4 anak. Bila x menyatakan banyaknya kelahiran anak laki-laki dengan probabilitas kelahiran 0.6, hitunglah :
   a. Probabilitas kelahiran 2 anak laki-laki
   b. Probabilitas memiliki tidak lebih dari 2 anak laki-laki

c. Rata-rata dan simpangan baku peubah acak x

Lakukan perhitungan dengan menggunakan distribusi binomial

7. Hitunglah probabilitas distribusi binomial data-data berikut :
   a. $p = 0.7$ $n = 7$ $x>4$
   b. $p = 0.5$ $n = 5$ $2 < x \leq 5$
   c. $p = 0.6$ $n = 8$ $x <5$
   d. $p = 0.2$ $n = 9$ $1 \leq x < 7$

8. Polisi resor Bumiayu mencatat bahwa rata-rata tertangkap 5 orang dalam kasus psikotropika setiap bulan. Hitunglah probabilitas bahwa pada suatu bulan tertentu orang yang ditangkap karena menggunakan obat-obatan terlarang adalah :
   a. Tepat 5 orang
   b. Kurang dari 5 orang
   c. Antara 5 – 9 orang