Materi & Contoh Soal Distribusi Binomial

Kursiguru.com

A.Definisi Bistribusi Binomial

Distribusi Binomial adalah suatu distribusi probabilitas yang dapat digunakan bilamana suatu proses sampling dapat diasumsikan sesuai dengan proses Bernoulli. Misalnya, dalam perlemparan sekeping uang logam sebanyak 5 kali, hasil setiap ulangan mungkin muncul sisi gambar atau sisi angka. Begitu pula, bila kartu diambil berturut-turut, kita dapat memberi label "berhasil" bila kartu yang terambil adalah kartu merah atau "gagal" bila yang terambil adalah kartu hitam. Ulangan-ulangan tersebut bersifat bebas dan peluang keberhasilan setiap ulangan tetap sama,taitu sebasar ½..(Ronald E. Walpole).

B. Syarat Distribusi Binomial

1. jumlah trial merupakan bilangan bulat Contoh melambungkan coin 2 kali, tidak mungkin2 ½ kali.
2. Setiap eksperiman mempunya idua *outcome* (hasil). Contoh:sukses/gagal,laki/perempuan, sehat/sakit,setuju/tidaksetuju.
3. Peluang sukses sama setiap eksperimen.

   Contoh: Jika pada lambungan pertama peluang keluar mata H/sukses adalah ½, pada lambungan seterusnya juga ½. Jika sebuah dadu, yang diharapkan adalah keluar mata lima, maka dikatakan peluang sukses adalah 1/6, sedangkan peluang gagal adalah 5/6.Untuk itu peluang sukses dilambangkan p, sedangkan peluang gagal adalah (1-p) atau biasa juga dilambangkan q, di mana q = 1-p.

C. Ciri-ciri Distribusi Binomial.

Distribusi Binomial dapat diterapkan pada peristiwa yang memiliki ciri-ciri percobaan Binomial atau Bernoulli trial sebagai berikut :

1. Setiap percobaan hanya mempunyai 2 kemungkinan hasil : sukses(hasil yang dikehendakai, dan gagal(hasil yang tidak dikehendaki)
2. Setiap percobaan beersifat independen atau dengan pengembalian.
3. Probabilita sukses setiap percobaan harus sama, dinyatakan dengan p. Sedangkan probabilita gagal dinyatakan dengan q, dan jumlah p dan q harus sama dengan satu.
4. Jumlah percobaan, dinyatakan dengan n, harus tertentu jumlahnya.

D. Penerapan Distribusi Binomial

Beberapa kasus dimana distribusi normal dapat diterapkan yaitu:

1. Jumlah pertanyaan dimana anda dapat mengharapkan bahwa terkaan anda benar dalam ujian pilihan ganda.
2. Jumlah asuransi kecelakaan yang harus dibayar oleh perusahaan asuransi.
3. Jumlah lemparan bebas yang dilakukan oleh pemain basket selama satu musim.

Rumus Distribusi Binomial

b(x;n,p) = nCx px qn-x dimana x = 0,1,2,3,…,n
n : banyaknya ulangan
x : banyaknya keberhasilan dalam peubah acak x
p : peluang berhasil dalam setiap ulangan
q : peluang gagal, dimana q = 1-p dalam setiap ulangan

Contoh Distribusi Binomial :

1.Berdasarkan data biro perjalanan PT Mandala Wisata air, yang khusus menangani perjalanan wisata turis manca negara, 20% dari turis menyatakan sangat puas berkunjung ke Indonesia, 40% menyatakan puas, 25% menyatakan biasa saja dan sisanya menyatakan kurang puas. Apabila kita bertemu dengan 5 orang dari peserta wisata turis manca negara yang pernah berkunjung ke Indonesia, berapakah probabilitas :

a) Paling banyak 2 di antaranya menyatakan sangat puas.
b) Paling sedikit 1 di antaranya menyatakan kurang puas
c) Tepat 2 diantaranya menyatakan biasa saja
d) Ada 2 sampai 4 yang menyatakan puas

Jawab :

a.X ≤ 2

Lihat tabel dan lakukan penjumlahan sebagai berikut :

b(x; n, p) = b(0; 5, 0.20) + b(1; 5, 0.20) + b(2; 5, 0.20) =
0.32768 + 0.40960 + 0.20480 = 0.94208 atau
b(x=0) = 5C0 (0.20)0 (0.80)5 = 0.32768
b(x=1) = 5C1 (0.20)0 (0.80)4 = 0.40960
b(x=2) = 5C2 (0.20)0 (0.80)3 = 0.20480
+Maka hasil x ≤ 2 adalah = 0.94208

b.X ≥ 1
Lihat tabel dan lakukan penjumlahan sebagai berikut :

b(1; 5, 0.15) + b(2; 5, 0.15) + b(3; 5, 0.15) + b(4; 5, 0.15) + b(5; 5, 0.15) =
0.3915 + 0.1382 + 0.0244 + 0.002 + 0.0001 = 0.5562 atau
b(x ≥1; 5, 0.15) = 1 – b(x = 0)
1 – 5C0 (0.15)0 (0.85)5
1 – 0.4437 = 0.5563

c.X = 2

b(2; 5, 0.25) = 0.2637

d.X ≤ 2 X ≤ 4

Lihat tabel dan lakukan penjumlahan sebagai berikut :
b(2; 5, 0.40) + b(3; 5, 0.40) + b(4; 5, 0.40) = 0.3456 + 0.2304 + 0.0768 = 0.6528
Analisis masing – masing point :

a.Sebanyak paling banyak 2 dari 5 orang dengan jumlah 0.94208 atau 94,28% yang menyatakan sangat puas adalah sangat besar.

b.Paling sedikit 1 dari 5 orang (berarti semuanya) dengan jumlah 0,5563 atau 55,63% yang menyatakan kurang puas dapat dikatakan cukup besar (karena lebih dari 50%).

c.Tepat 2 dari 5 orang yang menyatakan biasa saja dengan jumlah 0,2637 atau 26,37% adalah kecil (karena dibawah 50%).

d.Ada 2 sampai 4 yang menyatakan puas dengan jumlah 0,6528% atau 65,28% dapat dikatakan cukup besar.

Analisis keseluruhan :

A. Persentase
Jika diambil persentase terbesar tanpa memperhatikan jumlah X, maka persentase terbesar ada di point pertama (a) yaitu 94,28% yang menyatakan sangat puas. Hal tersebut menandakan banyak turis manca negara yang sangat menyukai Indonesia.

B. Nilai X
Jika dilihat dari jumlah X, maka perlu diperhatikan point kedua (b). Jumlah X adalah paling sedikit 1 dari 5 orang (berarti X>=1) yaitu 55,63% yang menyatakan kurang puas .
Hal tersebut berarti kelima (semua) turis manca negara kurang puas terhadap kunjungannya ke Indonesia.

2.Kepala bagian produksi PT SAMSUNG melaporkan bahwa rata - rata produksi televisi yang rusak setiap kali produksi adalah sebesar 15 %. Jika dari total produksi tersebut diambil secara acak sebanyak 4 buah televisi, berapakah perhitungan dengan nilai probabilitas 2 ?

Jawab :

p (rusak) = 0,15, q (baik) = 0,85, x = 2, n = 4
Rumus : b (x ; n ; p) = nCx px q n-x
b (x = 2 ; 4 ; 0,12) = 4C2 (0,15)2 (0,85)(4 – 2)
= 0,0975

Analisis : Dengan jumlah 0,0975 atau 9,75% dari sampel acak sebanyak 4 buah televisi dan rata – rata produk rusak setiap kali produksi adalah sebesar 15%, dapat dikatakan kecil. Namun pada kenyataannya, meskipun dilihat secara persentase kecil (hanya 9,75%) yang namanya produk rusak harus tetap dikurangi atau bahkan dihilangkan untuk mengurangi kerugian.

RATA – RATA dan RAGAM DISTRIBUSI BINOMIAL

Rata – rata $\mu = n \cdot p$
Ragam $\sigma 2 = n \cdot p \cdot q$
n : ukuran populasi
p : peluang berhasil dalam setiap ulangan
q : peluang gagal, dimana q = 1-p dalam setiap ulangan

Contoh Rata – rata dan Ragam Distribusi Binomial :
Untuk b (5; 5, 20) dimana x = 5, n = 5 dan p = 0.20
q = 1-p ; q = 1-0.20 = sehingga q = 0.80
maka : $\mu = 5 \times 0.20 = 1$
$\sigma 2 = 5 \times 0.20 \times 0.8 = 0.80$
$\sigma = \sqrt{} 0.80 = 0.8944$.

2. Distribusi Poisson

A .Definisi Distribusi Poisson

Distribusi Poisson diberi nama sesuai dengan penemunya yaitu ***Siemon D. Poisson.*** Distibusi ini merupakan distribusi probabilitas untuk variabel diskrit acak yang mempunyai nilai 0,1, 2, 3 dst. Suatu bentuk dari distribusi ini adalah rumus pendekatan peluang Poisson untuk peluang Binomial yang dapat digunakan untuk pendekatan probabilitas Binomial dalam situasi tertentu.
Rumus Poisson dapat digunakan untuk menghitung probabilitas dari jumlah kedatangan, misalnya : probabilitas jumlah kedatangan nasabah pada suatu bank pada jam kantor. Distribusi Poisson ini digunakan untuk menghitung probabilitas menurut satuan waktu.

B. Rumus Pendekatan Peluang Poisson untuk Binomial

Pendekatan Peluang Poisson untuk Peluang Binomial dilakukan untuk mendekatkan probabilitas probabilitas dari kelas sukses (x) dari n percobaan Binomial dalam situasi dimana n sangat besar dan probabilitas kelas sukses (p) sangat kecil. Aturan yang diikuti oleh kebanyakan ahli statistika adalah bahwa n cukup besar dan p cukup kecil, **jika n adalah 20 atau lebih dari 20 dan p adalah 0.05 atau kurang dari 0.05**. Pada pendekatan ini rumusnya lebih mudah untuk digunakan dibandingkan dengan rumus Binomial.

Rumus pendekatannya adalah :

$P (x ; \mu) = e^{-\mu} . \mu^{X}$

X ! Dimana : **e** = 2.71828

μ = rata – ratakeberhasilan = **n . p**

x = Banyaknya unsur berhasil dalam sampel

n = Jumlah / ukuran populasi

p = probabilitas kelas sukses

Contoh soal :

1. Dua ratus penumpang telah memesan tiket untuk sebuah penerbangan luar negeri. Jika probabilitas penumpang yang telah mempunyai tiket **tidak akan datang** adalah 0.01 maka berapakah peluang ada 3 orang yang **tidak datang**.
2. Rata – rata seorang sekretaris baru melakukan lima kesalahan mengetik per halaman. Berapakah peluang bahwa pada halaman berikut ia :
1. Tidak ada kesalahan ($x = 0$)
2. Tidak lebih dari tiga kesalahan ($x \leq 3$) atau (0,1,2,3)
3. Lebih dari tiga kesalahan ($x > 3$) atau (4,…,15)

Jawab :

1. Dik : n = 200, P = 0.01, X = 3, $\mu = n . p = 200 . 0.01 = 2$

$P (x ; \mu) = e^{-\mu} . \mu^{X}$

X!

$= 2.71828^{-2} . 2^{3} = 0.1804$ atau 18.04 %

3!

2. Dik : $\mu = 5$

a. $x = 0$ $P (x ; \mu) = e^{-\mu} . \mu^{X}$

X!

$P (0 ; 5) = 2.71828^{-5} . 5^{0} = 0.0067$

0!

b. $x \leq 3$; $P (x ; \mu) = e^{-\mu} . \mu^{X}$

X!

$P (x \leq 3 , 5) = P(x 1, \mu) +\ldots.+p(x3, \mu)$

$= P(0, 5) + P (1, 5) + P (2, 5) + P (3, 5)$

$= 0.0067 + 0.0337 + 0.0842 + 0.1404$

$= 0.2650$ atau 26.5 %

c. $X > 3$; $P(x;\mu) = e^{-\mu} . \mu^{X}$
X!
$P(X > 3, 5) = P(X_4, \mu) + \ldots + p(X_{15}, \mu)$
$= P(4, 5) + P(5, 5) + \ldots\ldots + P(15, 5)$ atau

$P(X > 3, 5) = 1 - [P(X \leq 3, 5)]$
$= 1 - [P(X_0, \mu) + \ldots + p(X_3, \mu)]$
$= 1 - [P(0, 5) + \ldots + p(3, 5)]$
$= 1 - [0.2650]$
$= 73.5$ %

C. Rumus Proses Poisson

Distribusi Poisson dalam konteks yang lebih luas dari pada rumus pertama tadi. Sebagai ilustrasi, misalkan pada hari Senin ini adalah jam kerja yang sibuk pada suatu bank, dan kita tertarik oleh jumlah nasabah yang mungkin datang selama jam kerja tersebut, dengan ketertarikan kita sebenarnya terletak pada interval waktu dan jumlah kedatangan dalam interval waktu jika proses kedatangannya mempunyai karakteristik sebagai berikut:

1. Tingkat kedatangan rata – rata setiap unit waktu adalah konstant.
   Dalam ilustrasi tadi dapat berarti bahwa jika tingkat kedatangan rata – rata untuk periode jam adalah, misalkan 72 kedatangan setiap jam, maka tingkat ini melambangkan interval waktu pada jam kerja tadi : yaitu tingkat yang dapat dirubah kepada rata – rata yaitu 36 kedatangan setiap ½ jam atau 1.2 kedatangan setiap menit.

2. Jumlah kedatangan pada interval waktu tidak bergantung pada (bebas apa yang terjadi di interval waktu yang sudah lewat. Dalam ilustrasi tadi, dapat berarti bahwa kesempatan dari sebuah kedatangan di menit berikutnya adalah sama.

3. Tidak memiliki kesamaan bahwa akan lebih dari satu kedatangan dalam interval pendek, semakin pendek interval, semakin mendekati nol adalah probabilitas yang lebih dari satu kedatangan. Dalam ilustrasi tadi, bisa berarti bahwa adalah tidak mungkin untuk lebih dari satu nasabah yang dapat melawati jalan masuk dalam waktu satu detik.

Rumus proses poisson :
$P(x) = e^{-\lambda . t} . (\lambda . t)^{x}$
X! Dimana :**λ** = Tingkat rata – rata kedatangan tiap unit waktu
t = Jumlah unit waktu
x = Jumlah kedatangan dalam t unit waktu

Contoh soal :

Jika rata – rata kedatangan $\lambda = 72$ setiap jam, berapakah peluang dari $x = 4$ kedatangan dan $t = 3$ menit. Gunakan proses poisson.!
Jawab :
Dik : $\lambda = 72$ kedatangan setiap jam atau 72 / jam maka 1 jam atau 60 menit adalah unit waktunya.
Berarti 3 menit adalah 3 / 60 = 1 / 20 unit waktu maka t t = 1 / 20 dan x = 4

$P(x) = e^{-\lambda \,.\, t} \,.\, (\lambda \,.\, t)^{x}$
X!
$P(x) = e^{-72 \,.\, (1/20)} \,.\, (72 \,.\, 1/20)^{4}$
4!= 0.191 atau 19.1 %